Γραπτές προαγωγικές εξετάσεις περιόδου:..

Σχολή:..................................Τμήμα:..................................Εξάμηνο:....................

Μάθημα:..

Εισηγητής:..

Επώνυμο: Μιχαηλίδης .... Όνομα: Γεώργιος ....

Αρ. Μητρώου:......................................Ημερομηνία:.......................................

Άσκηση 1 Μετατρέπουμε τον πίνακα σε άνω τριγωνικό:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2-3\Gamma_1 \\ \Gamma_3-4\Gamma_1 \\ \Gamma_4-2\Gamma_1}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & -5 \\ 0 & 12 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & -9 & -6 \\ 0 & 11 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2-\Gamma_3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3-11\Gamma_2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

i) $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 0 = 0$

ii) $\operatorname{rank}(A) = 3$, διότι η κύρια διαγώνιος έχει τρία μη-μηδενικά στοιχεία.

iii) Εφόσον $\det(A) = 0$ ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 2

$$Ax = b, \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Δημιουργώ τον επαυξημένο πίνακα A|b και ξεκινάω τη διαδικασία απαλοιφής της μεθόδου Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & 8 & 5 & 12 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_1/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 5 & 12 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 - 4\Gamma_1]{\Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 + 3\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -12 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 + \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3/(-9)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} & x_3 = 2 \\ & x_2 - 6 \cdot x_3 = -12 \Rightarrow x_2 = 0 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_1 + 2 \cdot 0 + 2 = 3 \Rightarrow x_1 = 1 \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές λ, λύνουμε την εξίσωση $\det(A-\lambda I)=0$.

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(3-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

- Ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή: $\lambda_1 = 4$.

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot x_1^1 + 0 \cdot x_1^2 = 4 \cdot x_1^1 \\ 0 \cdot x_1^1 + 3 \cdot x_1^2 = 4 \cdot x_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Επομένως, το ιδιοδιάνυσμα x_1 είναι της μορφής: $x_1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

- Ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή: $\lambda_2 = 3$.

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot x_2^1 + 0 \cdot x_2^2 = 3 x_2^1 \\ 0 \cdot x_2^1 + 3 \cdot x_2^2 = 3 \cdot x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Επομένως, το ιδιοδιάνυσμα x_2 είναι της μορφής: $x_2 = \begin{bmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

Άσκηση 4

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\pi} \left[\sin(2x) - x^2 y\right] dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{x^3}{3}y\right]_0^{\pi} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[-\frac{1}{2}\cdot\cos(2\pi) - \frac{\pi^3}{3}y - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 - 0\right)\right] dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[-\frac{1}{2} - \frac{\pi^3}{3}\cdot y + \frac{1}{2}\right] dy = \int_{-1}^{1} -\frac{\pi^3}{3}\cdot y\,dy$$

$$= \left[-\frac{\pi^3}{3}\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} = -\frac{\pi^3}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = \emptyset$$

$$\text{Μέση Τιμή} = \frac{\iint_A f(x,y)\,dA}{\iint_R dA} = \frac{0}{2\pi} = \emptyset$$

Άσκηση 5

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^{1} x\cdot\cos(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\sin(xy)\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\sin x - \sin 0\right] dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\cos(\pi/2) - (-\cos 0)$$

$$= 0 - (-1) = 1$$

$$\text{Μέση Τιμή} = \frac{\iint_R f(x,y)\,dA}{\iint_R dA} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$