Γραπτές προαγωγικές εξετάσεις περιόδου:..

Σχολή:.................................Τμήμα:.....................................Εξάμηνο:......................

Μάθημα:..

Εισηγητής:...

Επώνυμο:...Μιχαηλίδης.............................Όνομα:....Γεώργιος..........................

Αρ. Μητρώου:..Ημερομηνία:..

Άσκηση 1   Μετατρέψαμε τον πίνακα σε άνω τριγωνικό, με τις μηδενικές γραμμές στις τελευταίες σειρές.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 - 4\Gamma_1]{\Gamma_2 - 2\Gamma_1,\ \Gamma_3 - 3\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & -5 \\ 0 & 11 & -7 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & -5 \\ 0 & 11 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

i) $\det(A) = 1 \cdot 11 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

ii) $\mathrm{rank}(A) = 2$, διότι η κύρια διαγώνιος έχει δύο μη-μηδενικά στοιχεία.

iii) Εφόσον $\det(A) = 0$ ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 2 $\quad Ax=b$, όπου $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Δημιουργώ τον επαυξημένο πίνακα $A|b$ και ξεκινάω τη διαδικασία απαλοιφής της μεθόδου Gauss:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 8 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{\Gamma_1/3} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow[\Gamma_3-4\Gamma_1]{\Gamma_2-2\Gamma_1} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\cdot(-1)} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array} \xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{array} \xrightarrow{\Gamma_3-4\Gamma_2} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}$$

Επομένως:

$$\begin{array}{llll|l} 1\ 2\ 1\ 2 \rightarrow & x_1+2x_2+x_3=2 & \rightarrow & x_1=2-2x_2-x_3 & x_1=1 \\ 0\ 1\ 3\ 8 \rightarrow & x_2+3x_3=8 & \rightarrow & x_2=8-3\cdot x_3 & x_2=-1 \\ 0\ 0\ -9\ -27 \rightarrow & -9x_3=-27 & \rightarrow & x_3=3 & x_3=3 \end{array}$$

Επομένως, η λύση είναι η $x=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 3

Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές λ, λύνουμε την εξίσωση $\det(A-\lambda I)=0$.

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)\cdot(5-\lambda) - 0\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow (5-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 5 \text{ (διπλή ιδιοτιμή)}$$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα θα λύσουμε το σύστημα $Ax = \lambda x$.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 5x_1 \Rightarrow 0\cdot x_1 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 5\cdot x_2 = 5x_2 \Rightarrow 0\cdot x_2 = 0 \end{matrix}$$

Το σύστημα αυτό ικανοποιείται $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Επομένως κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A.

Άσκηση 4

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\pi}\left[\cos(2x) - xy^2\right]dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{x^2}{2}y^2\right]_0^{\pi} dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\sin(2\pi) - \frac{\pi^2}{2}y^2 - \left(\frac{1}{2}\sin(2\cdot 0) - \frac{0^2}{2}y^2\right)\right]dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(-\frac{\pi^2}{2}y^2\right)dy = -\frac{\pi^2}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{\pi^2}{3}$$

$$\iint_R dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\pi} dx\,dy = (1-(-1))\cdot(\pi - 0) = 2\pi$$

$$\text{Μέση Τιμή} = \frac{\iint_R f(x,y)\,dA}{\iint_R dA} = \frac{\left(-\frac{\pi^2}{3}\right)}{2\pi} = -\frac{\pi}{6}$$

Άσκηση 5

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1} y\cdot\sin(xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_{0}^{\pi/2}\left[-\cos(xy)\right]_0^1 dy$$

$$= \int_{0}^{\pi/2}\left[-\cos(y) - (-\cos(0))\right]dy$$

$$= \int_{0}^{\pi/2}\left[1 - \cos(y)\right]dy = \left[y - \sin(y)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}$$

$$\iint_R dA = \int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1} dx\,dy = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Μέση Τιμή} = \frac{\iint_R f(x,y)\,dA}{\iint_R dA} = \frac{\left(\frac{\pi-2}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2(\pi-2)}{2\pi} = \frac{\pi-2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$$