ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Διακριτά Μαθηματικά

Θεωρία Συνόλων

Δρ. Θωμάς Λάγκας

Επισκόπηση

- Εισαγωγή
- Ορισμοί και σημειογραφία
- Περιγραφή συνόλων
- Το καθολικό σύνολο και το κενό σύνολο
- Ισότητα συνόλων και υποσύνολα
- Πληθικότητα συνόλων
- Το παράδοξο του Russell
- Δυναμοσύνολα
- Διατεταγμένες πλειάδες
- Πράξεις συνόλων
  - Τομή
  - Ένωση
  - Διαφορά
  - Συμμετρική διαφορά
  - Συμπληρωματικό
- Ταυτότητες συνόλων
- Πολυσύνολα

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Εισαγωγή

- Η θεωρία συνόλων είναι ένας σημαντικός κλάδος των Μαθηματικών
    - Διάφορα συστήματα αξιωμάτων έχουν σχεδιαστεί για την ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων
        - Σημείωση: ένα σύστημα αξιωμάτων είναι κάθε σύνολο αξιωμάτων από το οποίο μερικά ή όλα τα αξιώματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό για τη λογική εξαγωγή θεωρημάτων. Παράδειγμα: Η αξιωματοποίηση του Peano για τους φυσικούς αριθμούς
            - Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός 0.
            - Κάθε φυσικός αριθμός *a* έχει ως διάδοχο τον *Sa*.
            - Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που έχει ως διάδοχο το 0.
            - Για κάθε δύο διακριτούς φυσικούς αριθμούς *a* και *b*, οι διάδοχοί τους *Sa* και *Sb* είναι επίσης διακριτοί.
            - Αν μια ιδιότητα φέρεται από το 0 καθώς και από τον διάδοχο κάθε φυσικού αριθμού, τότε φέρεται από όλους τους φυσικούς αριθμούς (αξίωμα επαγωγής)
        - Το σύστημα Zermello-Fraenkel είναι το σημαντικότερο τέτοιο σύστημα και αποτελεί κοινό θεμέλιο των μαθηματικών

Ορισμοί και Σημειογραφία

- Ένα σύνολο είναι μια μη-διατεταγμένη συλλογή αντικειμένων
  - Π.χ. οι φοιτητές της τάξης
  - Π.χ. οι καρέκλες της αίθουσας
- Τα αντικείμενα που συμμετέχουν σε ένα σύνολο λέγονται στοιχεία ή μέλη του
  - Ένα σύνολο λέγεται ότι περιέχει τα μέλη του
- Ο συμβολισμός $a \in A$ δείχνει ότι το a είναι ένα στοιχείο του συνόλου A
  - Αν το a δεν είναι μέλος του A, γράφουμε $a \notin A$
    - Αυτό είμαι ισοδύναμο με το $\neg(a \in A)$
- Τα ίδια τα μέλη ενός συνόλου μπορεί να είναι επίσης σύνολα
  - Π.χ. το σύνολο όλων των τάξεων όπου κάθε τάξη είναι ένα σύνολο φοιτητών

Ορισμοί και Σημειογραφία – Σημαντικά Σύνολα

Σύμβολο	Περιγραφή
$\mathbb{N}$	Το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών
$\mathbb{N}_1$	Το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών μεγαλύτερων των 0
$\mathbb{Z}$	Το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Z}^+$	Το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Z}^-$	Το σύνολο όλων των αρνητικών ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Q}$	Το σύνολο όλων των ρητών αριθμών
$\mathbb{Q}^+$	Το σύνολο όλων των θετικών ρητών αριθμών
$\mathbb{Q}^-$	Το σύνολο όλων των αρνητικών ρητών αριθμών
$\mathbb{R}$	Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{R}^+$	Το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών
$\mathbb{R}^-$	Το σύνολο όλων των αρνητικών πραγματικών αριθμών
$\mathbb{C}$	Το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών

Περιγραφή Συνόλων – Η Μέθοδος Roster

- Γνωστή και ως **απαρίθμηση ή μέθοδος καταλόγου**
- Παράδειγμα: $S = \{a, b, c, d\}$
- Η σειρά δεν έχει σημασία
  - Π.χ. $S = \{a, b, c, d\} = \{b, c, d, a\}$
- Κάθε στοιχείο εμφανίζεται μόνο μία φορά – χωρίς επαναλήψεις
  - Π.χ. $S = \{a, a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- Οι τελείες (…) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν ένα σύνολο χωρίς απαρίθμηση (ή καταγραφή) όλων των μελών του
  - Χρήσιμο για μεγάλα (ή ακόμα και άπειρα) σύνολα
  - Φυσικά, το υποκείμενο μοτίβο πρέπει να είναι ξεκάθαρο – π.χ.:
    - $S = \{a, b, c, \dots, z\}$
    - $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$

Περιγραφή Συνόλων – Η Μέθοδος Δομητή

- Χρησιμοποιεί κατηγορήματα, προκειμένου να περιγράψει τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν όλα τα μέλη ενός συνόλου
- Παράδειγμα: Περιγράψτε το σύνολο S όλων των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι από το 100
  - Έστω $P(x) \equiv x \in \mathbb{Z}^{+} \wedge x < 100$
  - Τότε $S = \{x | P(x)\}$
  - Ισοδύναμα
    - $S = \{x | x \in \mathbb{Z}^{+} \wedge x < 100\}$
    - $S = \{x \in \mathbb{Z}^{+} | x < 100\}$
- Παράδειγμα: Περιγράψτε το σύνολο $\mathbb{Q}$ όλων των ρητών αριθμών
  - Έστω $P(x) \equiv x \in \mathbb{R} \wedge \exists p \exists q \left(p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \wedge x = \frac{p}{q}\right)$
  - Τότε $S = \{x | P(x)\}$

Περιγραφή Συνόλων – Σημειογραφία με Διαστήματα

Συμβολισμός	Περιγραφή
$[a, b]$	$\{x \mid x \geq a \ \wedge x \leq b\}$
$[a, b)$	$\{x \mid x \geq a \ \wedge x < b\}$
$(a, b]$	$\{x \mid x > a \ \wedge x \leq b\}$
(a, b)	$\{x \mid x > a \ \wedge x < b\}$

Κλειστό διάστημα

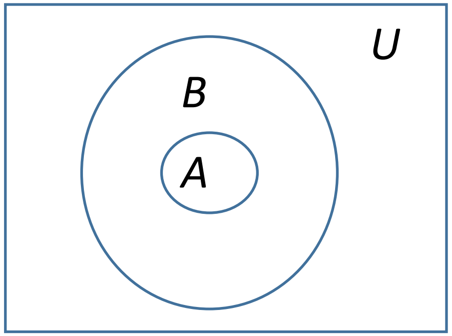
Ανοιχτό διάστημα

Το Καθολικό Σύνολο και το Κενό Σύνολο

- Το καθολικό σύνολο U είναι το σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα που λαμβάνονται υπόψη υπό το συγκεκριμένο συναφές πλαίσιο
  - Μπορεί να ορίζεται ρητά
    - Ή μπορεί να υπονοείται
  - Το καθολικό σύνολο είναι αυτό που ονομάσαμε πεδίο ορισμού στην Κατηγορηματική Λογική
- Το κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν περιλαμβάνει κανένα στοιχείο
  - Συμβολίζεται ως $\emptyset$ (ή μερικές φορές ως $\{\}$)
  - Προσέξτε ότι $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
    - Δηλ. το κενό σύνολο είναι διαφορετικό από ένα σύνολο που περιλαμβάνει το κενό σύνολο (το τελευταίο δεν είναι κενό, καθώς περιλαμβάνει ένα στοιχείο – το κενό σύνολο!)

Ισότητα Συνόλων και Υποσύνολα

- Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία
  - Για κάθε δύο σύνολα A και B, γράφουμε $A = B$ για να δείξουμε ισότητα
    - Τυπικά: $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
    - Γράφουμε $A \neq B$ για να δείξουμε ότι δύο σύνολα δεν είναι ίσα
- Για κάθε δύο σύνολα A και B, το A είναι υποσύνολο του B αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι επίσης του στοιχείο του B
  - Το συμβολίζουμε ως $A \subseteq B$
  - Τυπικά: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
- Για κάθε δύο σύνολα A και B, το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B αν και μόνο αν το A είναι υποσύνολο του B και το A δεν είναι ίσο με το B
  - Το συμβολίζουμε ως $A \subset B$
  - Τυπικά: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$

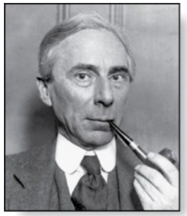


Ισότητα Συνόλων και Υποσύνολα

- Για να αποδείξουμε τυπικά την ισότητα μεταξύ δύο συνόλων A και B η αλήθεια της πρότασης $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ πρέπει να προκύψει μέσω τυπικής μαθηματικής απόδειξης
  - Για να αποδείξουμε ανισότητα, αρκεί να βρούμε ένα στοιχείο y τέτοιο ώστε $y \in A \ \land y \notin B$
    - Ή ισοδύναμα, ένα στοιχείο y τέτοιο ώστε $y \in B \land y \notin A$
- Για να αποδείξουμε τυπικά ότι το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B η αλήθεια της πρότασης $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$ πρέπει να προκύψει μέσω τυπικής μαθηματικής απόδειξης
  - Για να αποδείξουμε ότι το A δεν είναι υποσύνολο του B αρκεί να βρούμε ένα στοιχείο y τέτοιο ώστε $y \in A \land y \notin B$

Το Παράδοξο του Russell

- Έστω S είναι το σύνολο όλων των συνόλων που δεν είναι μέλη των ιδίων
  - Τότε είναι το S μέλος του ιδίου?
  - Αν η απάντηση είναι ναι τότε το S είναι, λόγω της ιδιότητας ότι είναι μέλος του ιδίου, ένα από τα σύνολα που είναι μέλη των ιδίων
    - Αυτό αποτελεί αντίφαση!
  - Αν η απάντηση είναι όχι τότε το S, λόγω της ιδιότητας ότι δεν είναι μέλος του S, δεν βρίσκεται μεταξύ των συνόλων που δεν είναι μέλη των ιδίων
    - Αυτό σημαίνει ότι το S πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των συνόλων που είναι μέλη των ιδίων
    - Αυτό αποτελεί και πάλι αντίφαση!!
  - Οπότε η ερώτηση δεν μπορεί να απαντηθεί!
  - Αυτό είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι κανείς μπορεί να δημιουργεί σύνολα ελεύθερα χωρίς κανέναν περιορισμό
  - Η αξιωματική θεωρεία συνόλων Zermelo-Fraenkel δεν πάσχει από τέτοια παράδοξα



Bertrand Russell
(1872-1970)

Πληθικότητα Συνόλων

- Αν ένα σύνολο S περιέχει n στοιχεία (για κάποιο φυσικό αριθμό n) τότε
  - Το S είναι πεπερασμένο
  - Το S έχει πληθικότητα n
    - Η πληθικότητα συμβολίζεται με $|S|$ ή $\#S$
    - Δηλ. $|S| = \#S = n$
- Παραδείγματα πληθικότητας
  - $|\emptyset| = 0$
  - $|S| = 24$ αν S είναι το σύνολο των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου
  - $|\{1,2,3\}| = 3$
  - $|\{\emptyset\}| = 1$
- Η πληθικότητα επίσης σχετίζεται με άπειρα σύνολα
  - Δεν εκφράζεται με φυσικούς αριθμούς

Δυναμοσύνολα

- Το δυναμοσύνολο του συνόλου S, που συμβολίζεται ως $\mathbb{P}(S)$, είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του S
  - Τυπικά: $\mathbb{P}(S) = \{A | A \subseteq S\}$
- Αν η πληθικότητα του S είναι n, τότε η πληθικότητα του $\mathbb{P}(S)$ είναι 2^n
  - Που ισοδυναμεί με $2^{|S|}$
- Παραδείγματα:
  - Αν $S = \{a, b\}$ τότε $\mathbb{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
  - Αν $S = \{a, b, c\}$ τότε $\mathbb{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- Προσέξτε ότι $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$

Διατεταγμένες Πλειάδες

- Μια n-πλειάδα $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ είναι μια διατεταγμένη συλλογή ή ακολουθία στοιχείων
  - a_1είναι το πρώτο στοιχείο
  - a_2είναι το δεύτερο στοιχείο
  - …
  - a_nείναι το τελευταίο στοιχείο
- Δύο n-πλειάδες $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ και $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ είναι ίσες αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα
  - Δηλ. $a_1 = b_1$ και $a_2 = b_2$ και … $a_n = b_n$
- Οι 2-πλειάδες ονομάζονται (διατεταγμένη) ζεύγη

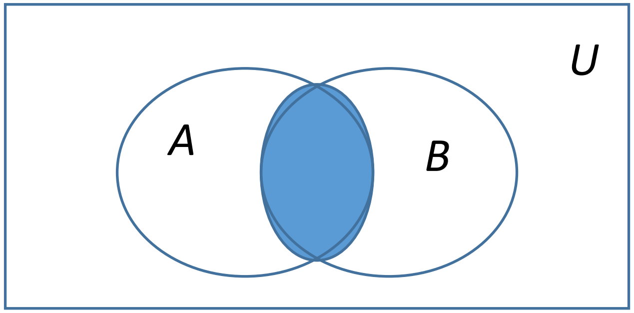
Καρτεσιανό Γινόμενο

René Descartes
(1596-1650)

- Το Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων A και B, που συμβολίζεται ως $A \times B$ είναι ένα σύνολο όλων των ζευγών (a, b) τέτοιο ώστε $a \in A$ και $\mathrm{b} \in B$
  - Τυπικά: $A \times B = \{(a, b) | a \in A \ \wedge \mathrm{b} \in B\}$
- Παράδειγμα – Το Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $\{a, b\}$ και $\{1,2,3\}$:
  - $\{a, b\} \times \{1,2,3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
- Το Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$, που συμβολίζεται ως $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, είναι το σύνολο όλων των n-πλειάδ ν $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ τέτοιο ώστε $a_i \in A_i$ για $i = 1, \ldots, n$
  - Τυπικά: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i \wedge i = 1, \ldots, n\}$
- Παράδειγμα – Το Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $\{0,1\}, \{1,2\}$, και $\{0,1,2\}$:
  - $\{0,1\} \times \{1,2\} \times \{0,1,2\} = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\}$

Πράξεις Συνόλων - Τομή

- Η τομή δύο συνόλων A και B, που συμβολίζεται ως $A \cap B$, είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν τόσο στο A όσο και στο B
  - Τυπικά: $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge x \in B\}$



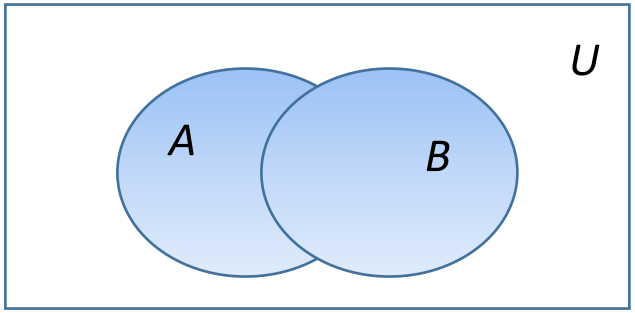
Διάγραμμα Venn για $A \cap B$

- *Δύο σύνολα ονομάζονται «**ξένα**» αν η τομή τους είναι το κενό σύνολο*
- Παράδειγμα
- $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$

  $\{1,2,3\} \cap \{4,5\} = \emptyset$

Πράξεις Συνόλων - Ένωση

- Η ένωση δύο συνόλων A και B, που συμβολίζεται ως $A \cup B$, είναι ένα σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A και B
  - Τυπικά: $A \cup B = \{x | x \in A \ \vee x \in B\}$



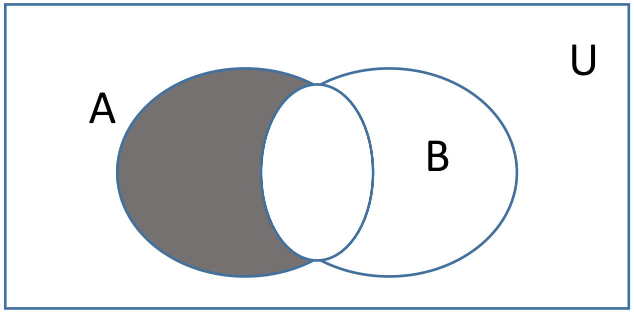
Διάγραμμα Venn για $A \cup B$

- Παράδειγμα - $\{1,2,3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1,2,3,4,5\}$
- Πληθικότητα: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - Παράδειγμα – Έστω A είναι το σύνολο των φοιτητών που γνωρίζουν C++ και B όσων γνωρίζουν Java
  - Για να υπολογίσουμε τους φοιτητές που γνωρίζουν είτε C++ είτε Java, προσθέτουμε τους φοιτητές που γνωρίζουν C++ με αυτούς που γνωρίζουμε Java και αφαιρούμε όσους γνωρίζουν και τα δύο (C++/Java)

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Πράξεις Συνόλων - Διαφορά

- Η διαφορά δύο συνόλων A και B, που συμβολίζεται ως $A - B$ ή $A \setminus B$, είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B
  - Τυπικά: $A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$



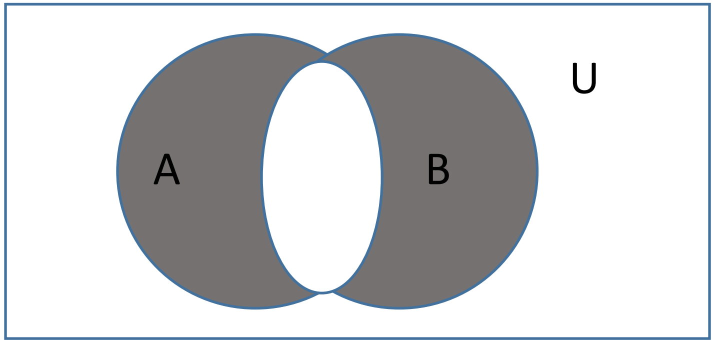
Διάγραμμα Venn για $A - B$

- *Η διαφορά αυτή ονομάζεται και «**συμπλήρωμα**» του A ως προς το B*
- Παράδειγμα: $\{1,2,3\} - \{3,4,5\} = \{1,2\}$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Πράξεις Συνόλων – Συμμετρική Διαφορά

- Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων A και B, που συμβολίζεται ως $A \oplus B$ (ή $A \ominus B$), είναι ένα σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B και όλα τα στοιχεία του B που δεν ανήκουν στο A
  - Τυπικά: $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$



Διάγραμμα Venn για $A \oplus B$

- Παράδειγμα:
- $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

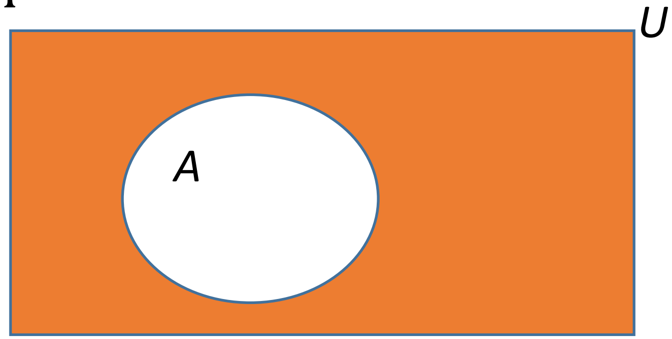
$A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{4,5,6,7,8\}$

$A \oplus B = \{1,2,3,6,7,8\}$

Πράξεις Συνόλων - Συμπλήρωμα

- Το συμπλήρωμα ενός συνόλου A (ως προς το καθολικό σύνολο U), που συμβολίζεται ως $\bar{A}$, είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του *U* που δεν ανήκουν στο *A*
  - Τυπικά: $\bar{A} = U - A$



Διάγραμμα Venn για $\bar{A}$

- Παράδειγμα: Αν U είναι οι ακέραιοι μικρότεροι του 100 βρείτε το συμπλήρωμα του $\{x \mid x > 70\}$
  - Απάντηση: $\{x \mid x \leq 70\}$

Ταυτότητες Συνόλων

Όνομα Νόμου	Νόμος	Όνομα Νόμου	Νόμος
Ταυτοτικοί	$A \cup \emptyset = A$	Αντιμεταθετικοί	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap U = A$		$A \cap B = B \cap A$
Κυριαρχίας	$A \cap \emptyset = \emptyset$	Προσεταιριστικοί	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	$A \cup U = U$		$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Αυτοδυναμίας	$A \cap A = A$	Επιμεριστικοί	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup A = A$		$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Συμπληρώματος	$\bar{\bar{A}} = A$	Απορρόφησης	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cup \bar{A} = U$		$A \cap (A \cup B) = A$
	$A \cap \bar{A} = \emptyset$	De Morgan's	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
			$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Πολυσύνολα

- Μερικές φορές έχει σημασία το πλήθος εμφανίσεων ενός στοιχείου σε μία μη διατεταγμένη συλλογή
- **Πολυσύνολο** είναι μία μη-διατεταγμένη συλλογή στοιχείων, όπου ένα στοιχείο μπορεί να εμφανίζεται ως μέλος **περισσότερες από μία φορές**
- Π.χ. Το πολυσύνολο [*a, a, a, b, b*] περιέχει το *a* 3 φορές και το *b* 2 φορές
- Εναλλακτικά, ο συμβολισμός $[m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, m_3 \cdot a_3, \ldots, m_r \cdot a_r]$
- Οι αριθμοί m_i ονομάζονται πολλαπλότητες των στοιχείων

Πολυσύνολα

- <u>Πράξεις πολυσυνόλων</u>
  - Ένωση *P* και *Q*: Η πολλαπλότητα ενός στοιχείου είναι η μέγιστη των πολλαπλοτήτων στα *P* και *Q*
  - Τομή *P* και *Q*: Η πολλαπλότητα ενός στοιχείου είναι η ελάχιστη των πολλαπλοτήτων στα *P* και *Q*
  - Διαφορά *P* και *Q*: Η πολλαπλότητα ενός στοιχείου είναι η πολλαπλότητά του στο *P* μείον την πολλαπλότητά του στο *Q* (0 αν βγαίνει αρνητική)
  - Άθροισμα *P* και *Q*: Η πολλαπλότητα ενός στοιχείου είναι το άθροισμα των πολλαπλοτήτων του στα *P* και *Q*
- Παράδειγμα
  - Έστω τα πολυσύνολα $P = [4 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c]$ και $Q = [3 \cdot a, 4 \cdot b, 2 \cdot d]$. Βρείτε τα:
  - $P \cup Q = [4 \cdot a, 4 \cdot b, 3 \cdot c, 2 \cdot d]$
  - $P \cap Q = [3 \cdot a, 1 \cdot b]$
  - $P - Q = [1 \cdot a, 3 \cdot c]$
  - $P + Q = [7 \cdot a, 5 \cdot b, 3 \cdot c, 2 \cdot d]$