v.29_10_2024

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ
ΨΗΦΙΑΚΗ ΣΧΕΔΙΑΣΗ (106ΕΥΥΚ)
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ 2024-2025

Διάλεξη Νο3:

Πίνακες/Χάρτες Karnaugh (Καρνώ)

Σχεδίαση Ψηφιακών Συστημάτων

Δ. Καραμπατζάκης, Επίκουρος Καθηγητής

email. dkara@cs.duth.gr

Δήλωση προσβασιμότητας

Σε αυτό το μάθημα όλες/οι οι φοιτήτριες/τές απολαμβάνουν – και αντίστοιχα υποχρεούνται να σέβονται – το δικαίωμα της ίσης μεταχείρισης. Δεν είναι ανεκτή και αποδεκτή κανενός τύπου και μορφής διάκριση με κριτήρια την εθνικότητα, τη φυλή, την καταγωγή, τη γλώσσα, το φύλο, τη θρησκεία, την ηλικία, την υγεία, τη σωματική ικανότητα, την ιδιωτική ζωή, τον γενετήσιο προσανατολισμό, τη σωματική ικανότητα και την οικονομική και κοινωνική κατάσταση στην οποία αυτοί βρίσκονται.

Το Πανεπιστήμιο άγρυπνα μεριμνά για τη διασφάλιση της αρχής των ίσων ευκαιριών και της ίσης μεταχείρισης. Οι κοινωνικές προκαταλήψεις και οι ιδεολογικές παρωπίδες είναι έννοιες τελείως ξένες με την επιστημονική πρόοδο την οποία το Πανεπιστήμιο είναι ταγμένο να υπηρετεί.

Ο Διδάσκων

Πληροφορίες για το Μάθημα

Διδάσκων:

Δημήτρης Καραμπατζάκης, Επίκουρος Καθηγητής

Αναλογικά και Ψηφιακά Ηλεκτρονικά Συστήματα

Μέλος Εργαστηρίου Βιομηχανικών και Εκπαιδευτικών Ενσωματωμένων Συστημάτων

Επικοινωνία / πληροφορίες:

Email. dkara@cs.duth.gr

web. http://www.internetofthings.gr/

Ώρες Γραφείου:

Τετάρτη και Πέμπτη 10.00 π.μ. -12.00 μ.μ.,

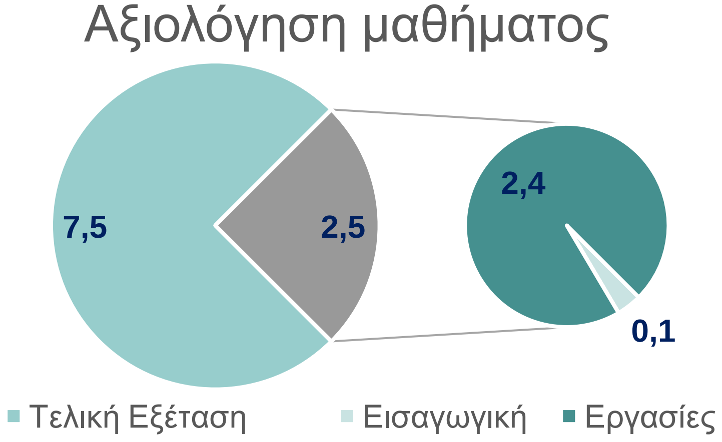
μετά από συνεννόηση με email στο ΦΕ 315 (πάνω από αιθ. Α1)

Πληροφορίες για το Μάθημα (Γενικές)

- Κάθε Τρίτη 10.00 π.μ. - 12.00 μ.μ. και Πέμπτη 13.00 μ.μ. - 15.00 μ.μ. μάθημα θεωρίας στο Μεγάλο Αμφιθέατρο (μπορεί να αλλάζει με ανακοινώσεις).
- Η διαχείριση του μαθήματος θα γίνει με χρήση της υπηρεσίας https://courses.cs.duth.gr
- Όλοι οι φοιτητές πρέπει να έχουν λογαριασμό στο uregister.
- Η ιστοσελίδα με τις πληροφορίες του μαθήματος: http://iees.cs.ihu.gr/?page_id=3096
- Υλικό του μαθήματος στο moodle: https://moodle.cs.duth.gr/

Πληροφορίες για το Μάθημα (Αξιολόγηση)

- **Η βαθμολογία είναι 75% από την τελική εξέταση και 25% από τις ατομικές εργασίες (1+1 σετ ασκήσεων) που θα δοθούν για το σπίτι.**
- **Η τελική εξέταση είναι με ανοιχτό το κύριο σύγγραμμα του μαθήματος.**
- **Ο βαθμός του μαθήματος (ΒΜ = ΓΕ*0,75 + ΣΑ*0,25) πρέπει να είναι τουλάχιστον πέντε (5).**



Πληροφορίες για το Μάθημα (Μονάδες)

- **Κωδικός Μαθήματος:** 106ΕΥΥΚ
- **Εξάμηνο:** 1ο
- **Τύπος Μαθήματος:** Υποβάθρου, Ανάπτυξης Δεξιοτήτων
- **Είδος Μαθήματος:** Υποχρεωτικό (ΥΠ)
- **Διδασκαλία Θεωρίας:** 3 ώρες/εβδομάδα
- **Διδασκαλία Φροντιστήριο:** 1 ώρες/εβδομάδα
- **Πιστωτικές μονάδες ECTS: 7**
- **Γλώσσα διδασκαλίας και Εξετάσεων:** Ελληνικά

Πληροφορίες για το Μάθημα (Φόρτος)

Δραστηριότητα	Φόρτος εργασίας εξαμήνου
Διαλέξεις	78 ώρες
Φροντιστηριακές Ασκήσεις	26 ώρες
Γραπτές Εξετάσεις	2 ώρες
Γραπτές Εργασίες	34 ώρες
Αυτοτελής Μελέτη	35 ώρες
Σύνολο	**175 ώρες (7 ECTS)**

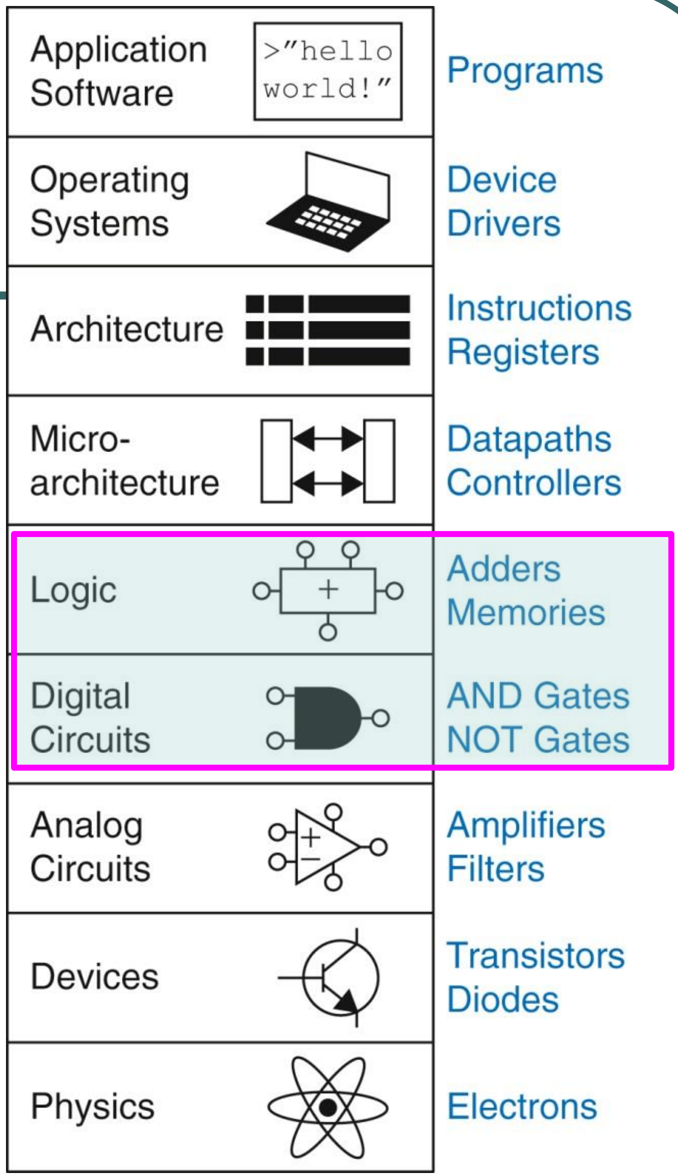
Κύριο Σύγγραμμα Μαθήματος (ΕΥΔΟΞΟΣ)

Ψηφιακή Σχεδίαση
με τις Γλώσσες VHDL και Verilog

Συγγραφέας: Πογαρίδης Δημήτριος

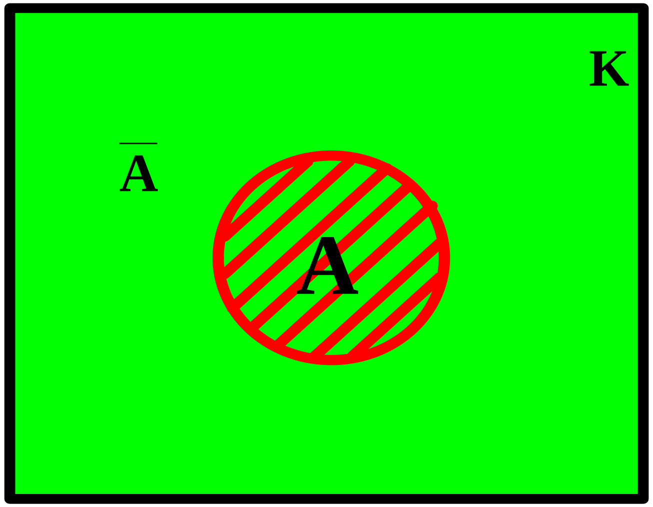
Έτος Έκδοσης: 2019
Κωδικός στον Εύδοξο: **86192991**

Επίπεδα Αφαίρεσης



Ελαχιστοποίηση Συναρτήσεων Πίνακες Karnaugh

Πίνακας Karnaugh

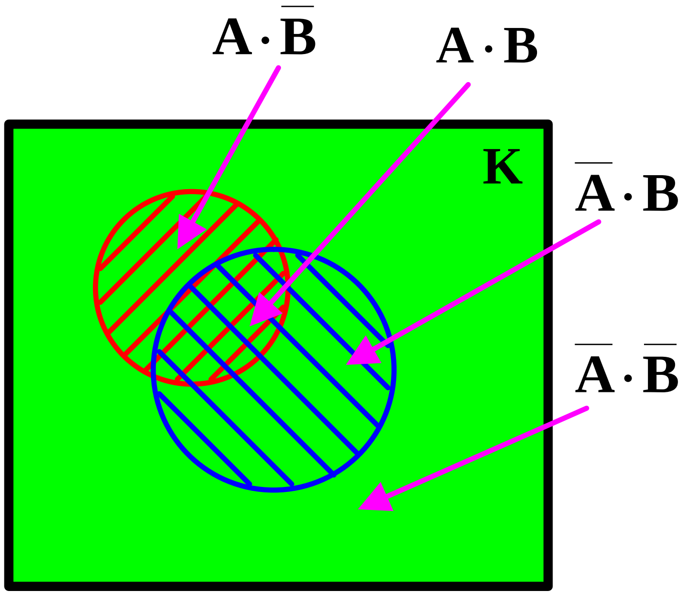


Έτσι έστω η συνάρτηση *K* με χώρο μεταβολής της το τετράγωνο που φαίνεται στο σχήμα και μια άλλη συνάρτηση *f*=*A* υποσύνολο της K.

Τότε ο χώρος μεταβολής της *A* είναι ο γραμμοσκιασμένος χώρος και ο χώρος έξω από τον κύκλο είναι ο χώρος μεταβολής της συμπληρωματικής της *A*.

Πίνακας Karnaugh

Αν υποτεθούν δύο συναρτήσεις $f=A$ και $f=B$ που έχουν και έναν κοινό χώρο όπως φαίνεται στο σχήμα.



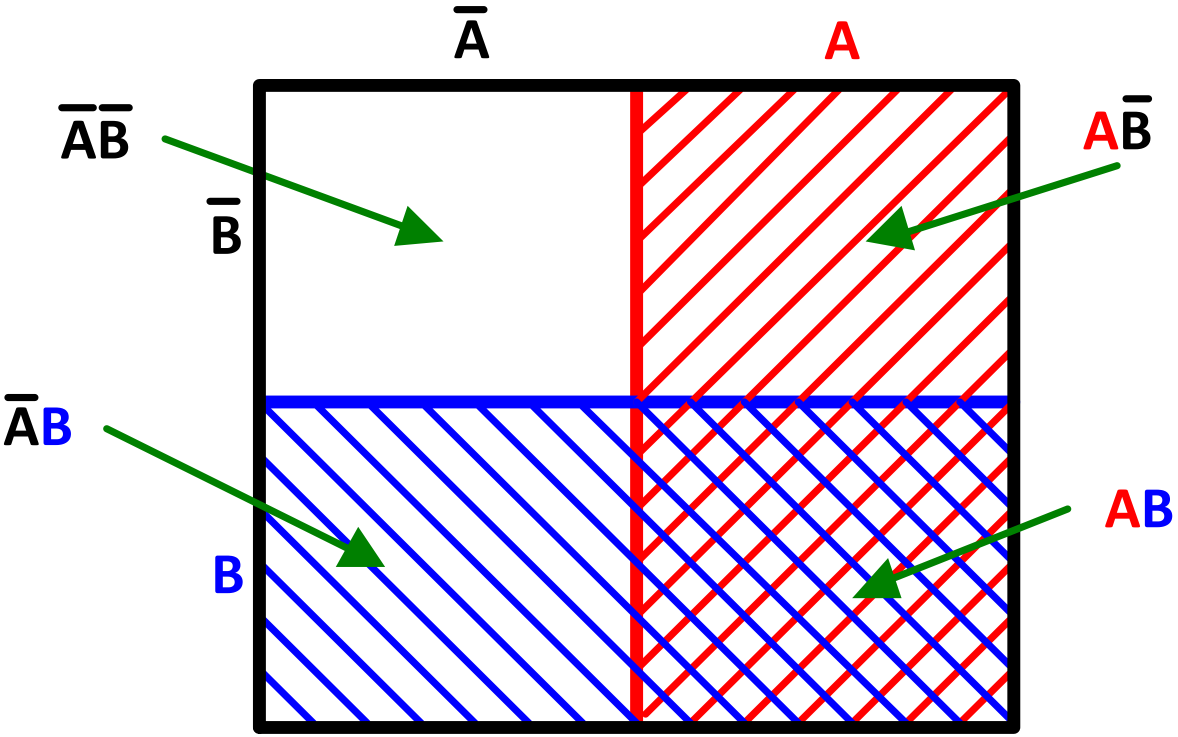
Ο χώρος που περιέχεται στο *A* αλλά όχι και στο *B* είναι ο χώρος $A\cdot\overline{B}$

Ο χώρος που περιέχεται και στο *A* και στο *B* είναι ο χώρος $A\cdot B$

Ο χώρος που περιέχεται στο *B* αλλά όχι και στο *A* είναι ο χώρος $\overline{A}\cdot B$

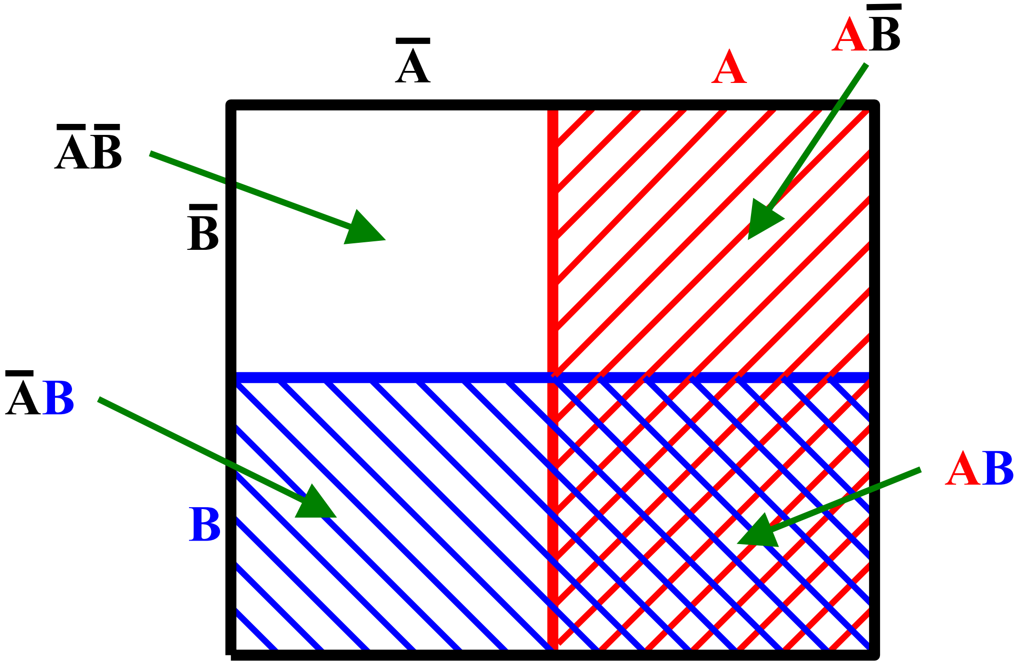
Ο χώρος που δεν περιέχεται ούτε στο *A* ούτε στο *B* είναι ο χώρος $\overline{A}\cdot\overline{B}$

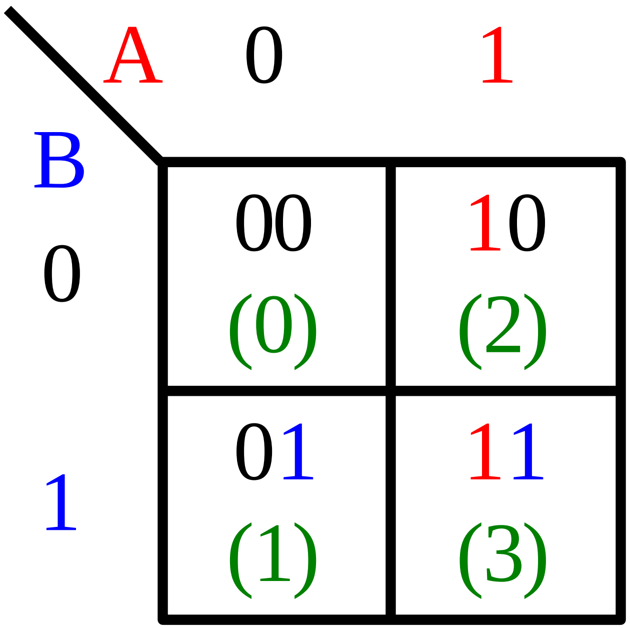
Πίνακας Karnaugh



Η επέκταση της έννοιας των διαγραμμάτων Venn οδηγεί στους Πίνακες Karnaugh όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο σχήμα, όπου οι κύκλοι *A* και *B* έχουν αντικατασταθεί με τα παραλληλόγραμμα *A* και *B* και το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας Karnaugh δύο μεταβλητών *A* και *B*.

Από την παραπάνω λογική απορρέει η κατασκευή του πίνακα Karnaugh δύο μεταβλητών.





Πίνακας τριών μεταβλητών

Κώδικας Gray

C \ AB	00	01	11	10
0	000 (0)	010 (2)	110 (6)	100 (4)
1	001 (1)	011 (3)	111 (7)	101 (5)

Πίνακας τεσσάρων μεταβλητών

Κώδικας Gray

CD \ AB	00	01	11	10
00	0000 (0)	0100 (4)	1100 (12)	1000 (8)
01	0001 (1)	0101 (5)	1101 (13)	1001 (9)
11	0011 (3)	0111 (7)	1111 (15)	1011 (11)
10	0010 (2)	0110 (6)	1110 (14)	1010 (10)

Κώδικας Gray

Πίνακας Karnaugh πέντε μεταβλητών.

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

Πίνακας Karnaugh έξι μεταβλητών.

B=0

A=0

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A=1

EF \ CD	00	01	11	10
00	32	36	44	40
01	33	37	45	41
11	35	39	47	43
10	34	38	46	42

B=1

EF \ CD	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

EF \ CD	00	01	11	10
00	48	52	60	56
01	49	53	61	57
11	51	55	63	59
10	50	54	62	58

Η απλοποίηση (ελαχιστοποίηση) με τη μέθοδο αυτή γίνεται ως εξής:

- **Με τη βοήθεια του νόμου του Shannon μετατρέπεται η λογική συνάρτηση σε άθροισμα ελαχίστων όρων.**
- **Τοποθετείται το ‘1’ στα τετραγωνίδια του πίνακα για κάθε όρο που υπάρχει στο άθροισμα ελαχίστων όρων και ‘0’ στα υπόλοιπα τετραγωνίδια.**
- **Σχηματίζονται βρόχοι από γειτονικά εφαπτόμενα τετραγωνίδια που περιέχουν το ‘1’. Επιλέγονται πάντα οι μεγαλύτεροι δυνατοί βρόχοι προσέχοντας το σύνολο των τετραγωνιδίων ενός βρόχου να δίνεται από τη σχέση 2^k όπου k είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός (δηλαδή βρόχοι που θα αποτελούνται από 1, 2, 4, 8 και 16 τετραγωνίδια).**

Η απλοποίηση (ελαχιστοποίηση) με τη μέθοδο αυτή γίνεται ως εξής:

- **Κάθε τετραγωνίδιο που περιέχει ‘1’ θα πρέπει να ληφθεί τουλάχιστον μία φορά.**
- **Ο πίνακας μπορεί να θεωρηθεί σαν κύλινδρος και τα τέσσερα ακραία τετραγωνάκια γωνίες σαν ένα βρόχος.**
- **Η ελάχιστη συνάρτηση θα αποτελείται από τόσους όρους όσοι και οι αριθμοί των βρόχων των τετραγωνιδίων.**
- **Κάθε όρος της ελάχιστης συνάρτησης θα αποτελείται από τις μεταβλητές εκείνες ή τις συμπληρωματικές τους των οποίων η τιμή δεν μεταβάλλεται στο πλαίσιο του βρόχου.**

Ο βρόχος ενός τετραγωνιδίου χρειάζεται τέσσερις μεταβλητές για να περιγραφεί.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

$$f = A \bullet B \bullet C \bullet D$$

Ο βρόχος <u>δύο τετραγωνιδίων</u> χρειάζεται τρεις μεταβλητές για να περιγραφεί.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$$f = A \bullet B \bullet C$$

Ο βρόχος τεσσάρων τετραγωνιδίων χρειάζεται δύο μεταβλητές για να περιγραφεί.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$$f = B \bullet D$$

Ο βρόχος <u>οκτώ τετραγωνιδίων</u> χρειάζεται μια μεταβλητή για να περιγραφεί.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$$f = D$$

Ο βρόχος δέκα έξι τετραγωνιδίων εμπεριέχει όλους τους ελάχιστους όρους, είναι δηλαδή άθροισμα όλων των ελάχιστων όρων, και άρα η *f=1*.

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$f = 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.11

Να απλοποιηθεί με τη μέθοδο του πίνακα Karnaugh η λογική συνάρτηση $f = A\cdot\overline{B} + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot C$

Η συνάρτηση μετατρέπεται σε άθροισμα ελαχίστων όρων:

$$f = A\cdot\overline{B} + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot C$$

$$= A\cdot\overline{B}\cdot(C+\overline{C}) + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot C\cdot(B+\overline{B})$$

$$= A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C$$

$$= A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C$$

$$= 101 + 100 + 110 + 111 = \Sigma(4,5,6,7)$$

$$f = \Sigma(4,5,6,7)$$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

$$f = \Sigma(4,5,6,7)$$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

A

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

$$f_{min} = A$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.12

Να απλοποιηθεί με τη μέθοδο του πίνακα Karnaugh η λογική συνάρτηση $f = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D$

Η συνάρτηση μετατρέπεται σε άθροισμα ελαχίστων όρων:

$$f = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D$$

$$= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}\cdot(C+\overline{C}) + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}\cdot(C+\overline{C}) + A\cdot B\cdot C\cdot D$$

$$= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$

$$+ A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D$$

$$= 0010 + 0000 + 1010 + 1000 + 1111$$

$$= \Sigma\left(0,2,8,10,15\right)$$

$$f = \Sigma(0,2,8,10,15)$$

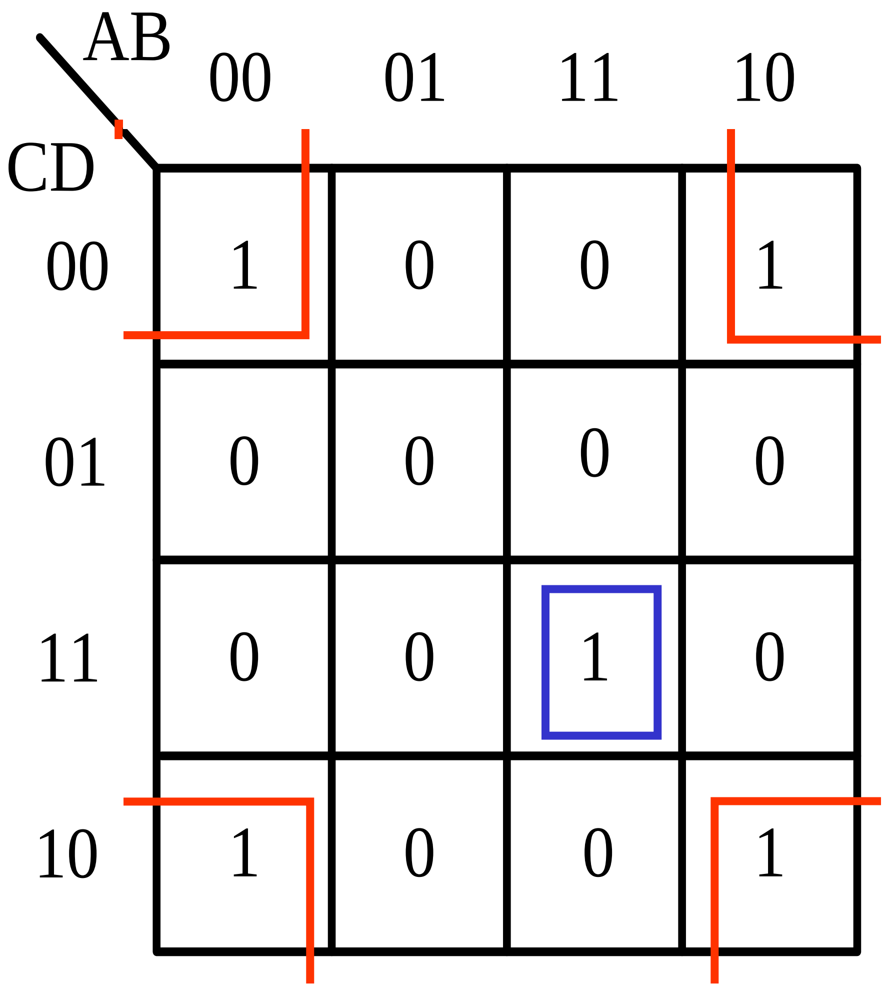
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	1

$$f = \Sigma(0,2,8,10,15)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	1

$f = \Sigma(0,2,8,10,15)$



$$f = \Sigma(0,2,8,10,15)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	1

$\overline{B} \cdot \overline{D}$

$$f = \Sigma(0,2,8,10,15)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	1

$\overline{B} \cdot \overline{D}$

$A \cdot B \cdot C \cdot D$

$$f_{min} = \overline{B} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.14

Να απλοποιηθεί με τη μέθοδο του πίνακα Karnaugh η λογική συνάρτηση $f = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot B\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$

Η συνάρτηση μετατρέπεται σε άθροισμα ελαχίστων όρων:

$$f = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot B\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$$

$$= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot(D+\overline{D}) + \overline{A}\cdot B\cdot D\cdot(C+\overline{C}) + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot(D+\overline{D}) + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$$

$$= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$$

$$+ \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$$

$$= 0001 + 0000 + 0111 + 0101 + 0011 + 0010 + 1010$$

$$= \Sigma(0,1,2,3,5,7,10)$$

$$f = \Sigma(0,1,2,3,5,7,10)$$

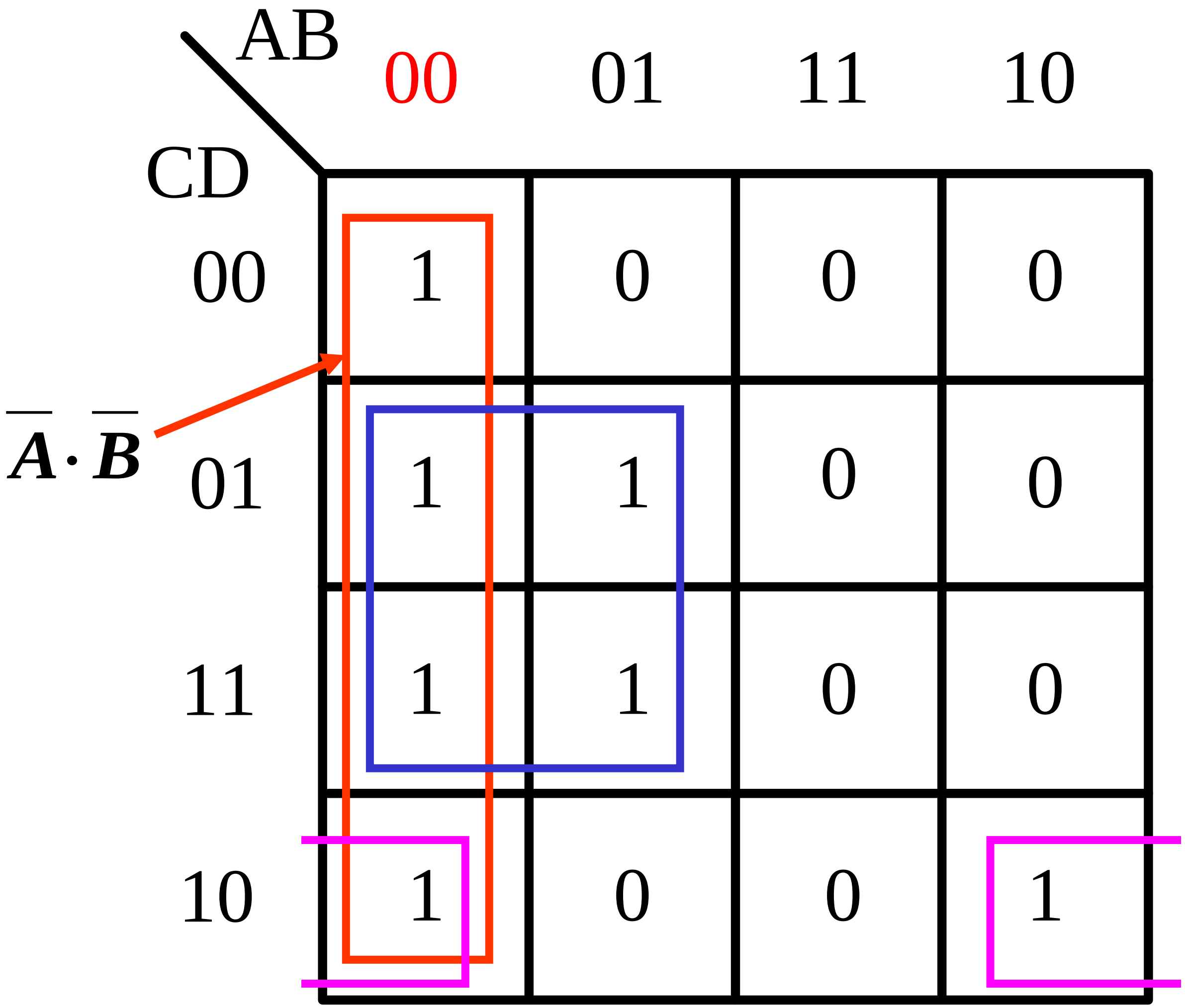
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	1

$$f = \Sigma(0,1,2,3,5,7,10)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	1

$$f=\Sigma(0,1,2,3,5,7,10)$$



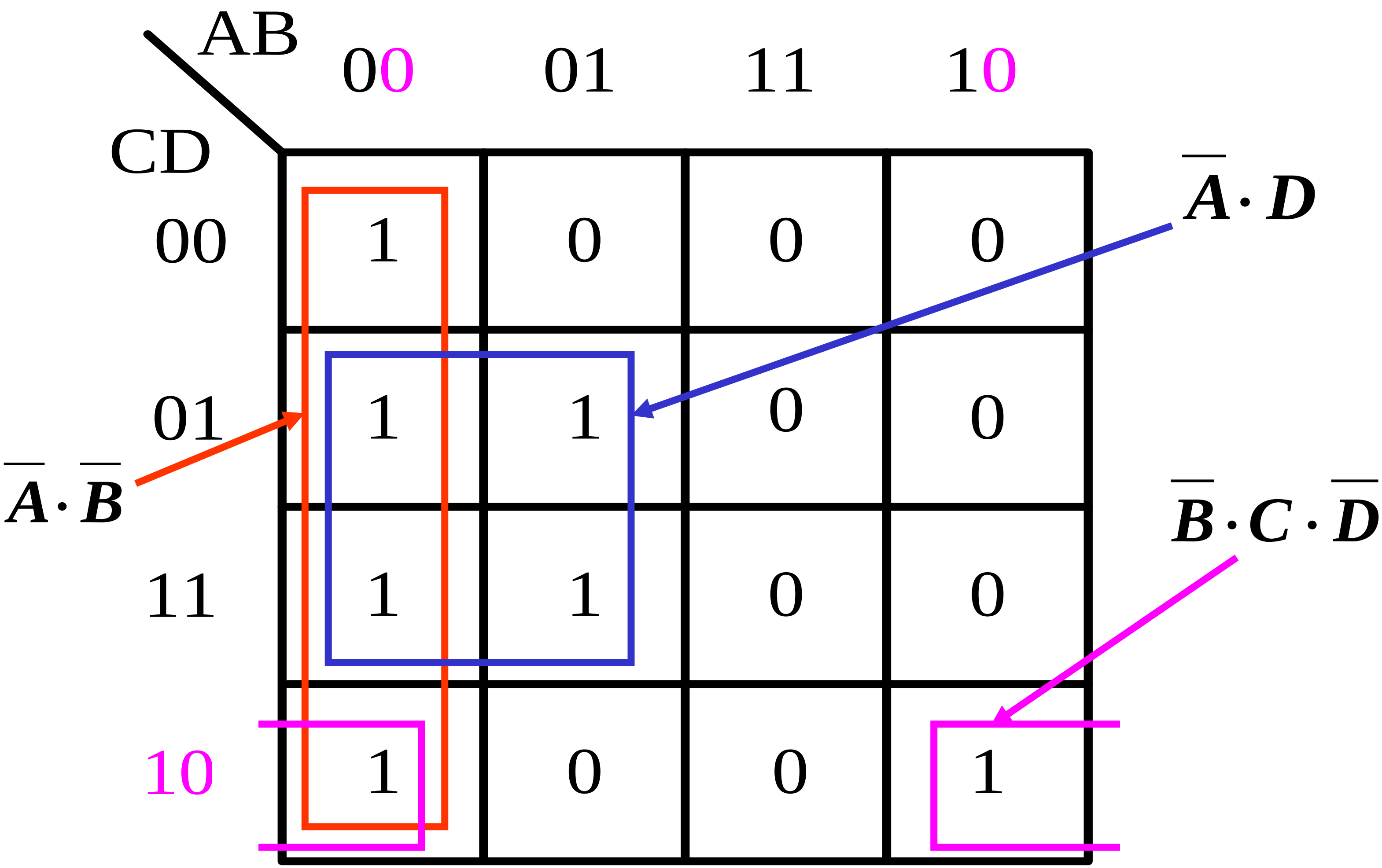
$$f = \Sigma(0,1,2,3,5,7,10)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	1

$\overline{A} \cdot \overline{B}$

$\overline{A} \cdot D$

$$f = \Sigma(0,1,2,3,5,7,10)$$



$$f_{min} = \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot D + \overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.15

Να απλοποιηθεί με τη μέθοδο του πίνακα Karnaugh η λογική συνάρτηση $f = A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D\cdot \overline{E} + B\cdot C\cdot \overline{D}\cdot E + C\cdot D$

Η συνάρτηση μετατρέπεται σε άθροισμα ελαχίστων όρων:

$$f = A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D\cdot \overline{E} + B\cdot C\cdot \overline{D}\cdot E + C\cdot D$$

$$= A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D\cdot \overline{E} + B\cdot C\cdot \overline{D}\cdot E\cdot (A+\overline{A}) + C\cdot D(A+\overline{A})\cdot (B+\overline{B})\cdot (E+\overline{E})$$

$$= A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D\cdot \overline{E} + A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}\cdot E + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}\cdot E + (A\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot C\cdot D)\cdot (B+\overline{B})\cdot (E+\overline{E})$$

$$= A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D\cdot \overline{E} + A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}\cdot E + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}\cdot E + A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E$$

$$+ A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D\cdot E + \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D\cdot E + A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot \overline{E} + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D\cdot \overline{E}$$

$$+ A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D\cdot \overline{E} + \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D\cdot \overline{E}$$

$$= 11010 + 11101 + 01101 + 11111 + 01111 + 10111 +$$

$$+ 00111 + 11110 + 01110 + 10110 + 00110$$

$$= \Sigma(6,7,13,14,15,22,23,26,29,30,31)$$

$$f = \Sigma(6,7,13,14,15,22,23,26,29,30,31)$$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

$$f = \Sigma(6,7,13,14,15,22,23,26,29,30,31)$$

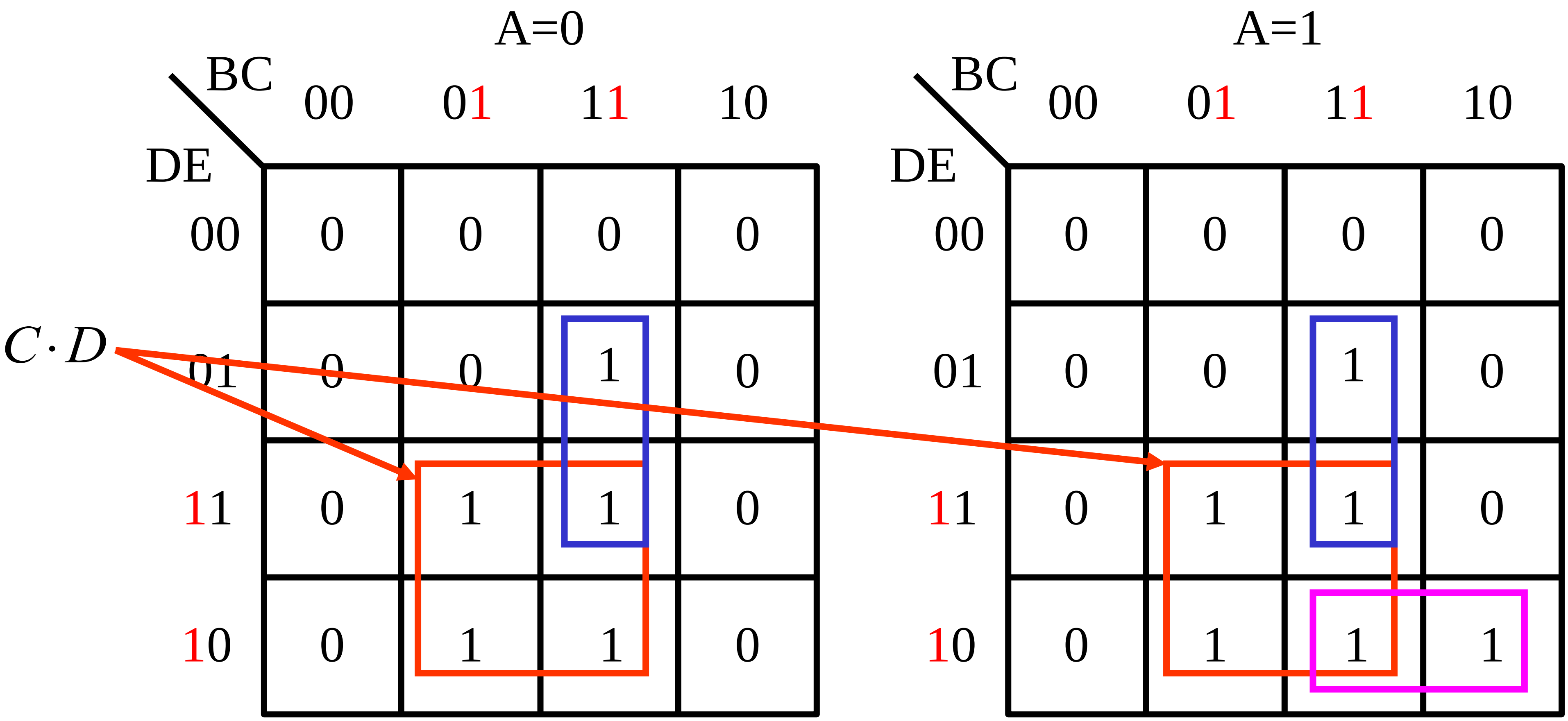
A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	1

$$f = \Sigma(6,7,13,14,15,22,23,26,29,30,31)$$



Για όσους βρόγχους είναι κοινοί και στους δύο πίνακες παραλείπεται η μεταβλητή Α.

$f = \Sigma(6,7,13,14,15,22,23,26,29,30,31)$

$B \cdot C \cdot E$

$C \cdot D$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	1

$$f = \Sigma(6,7,13,14,15,22,23,26,29,30,31)$$

$$B \cdot C \cdot E$$

$$C \cdot D$$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	1

$$A \cdot B \cdot D \cdot \overline{E}$$

$$f_{min} = A \cdot B \cdot D \cdot \overline{E} + B \cdot C \cdot E + C \cdot D$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.16

Να απλοποιηθεί με τη μέθοδο του πίνακα Karnaugh η λογική συνάρτηση f=Σ(0,2,4,6,9,11,13,15,17,21,25,27,29,31).

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

$f=\Sigma(0,2,4,6,9,11,13,15,17,21,25,27,29,31)$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	0	0

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

$f=\Sigma(0,2,4,6,9,11,13,15,17,21,25,27,29,31)$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	0	0

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

$B \cdot E$

$$f=\Sigma(0,2,4,6,9,11,13,15,17,21,25,27,29,31)$$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	0	0

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{E}$

$B\cdot E$

$f=\Sigma(0,2,4,6,9,11,13,15,17,21,25,27,29,31)$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	0	0

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{E}$ $B\cdot E$ $A\cdot\overline{D}\cdot E$

$$f_{min}=B\cdot E+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{E}+A\cdot\overline{D}\cdot E$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.17

Να απλοποιηθεί με τη μέθοδο του πίνακα Karnaugh η λογική συνάρτηση

$$f=\Sigma(5,7,9,10,13,14,15,18,21,23,25,26,29,30,31,37,39,40,41,44,45,47,53,55,57,58,59,61,63)$$

f=Σ(5,7,9,10,13,14,15,18,21,23,25,26,29,30,31, 37,39,40,41,44,45,47,53,55,57,58,59,61,63)

B=0, A=0

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

B=0, A=1

EF \ CD	00	01	11	10
00	32	36	44	40
01	33	37	45	41
11	35	39	47	43
10	34	38	46	42

B=1, A=0

EF \ CD	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

B=1, A=1

EF \ CD	00	01	11	10
00	48	52	60	56
01	49	53	61	57
11	51	55	63	59
10	50	54	62	58

f=Σ(5,7,9,10,13,14,15,18,21,23,25,26,29,30,31, 37,39,40,41,44,45,47,53,55,57,58,59,61,63)

A=0, B=0

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	1	1

A=1, B=0

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

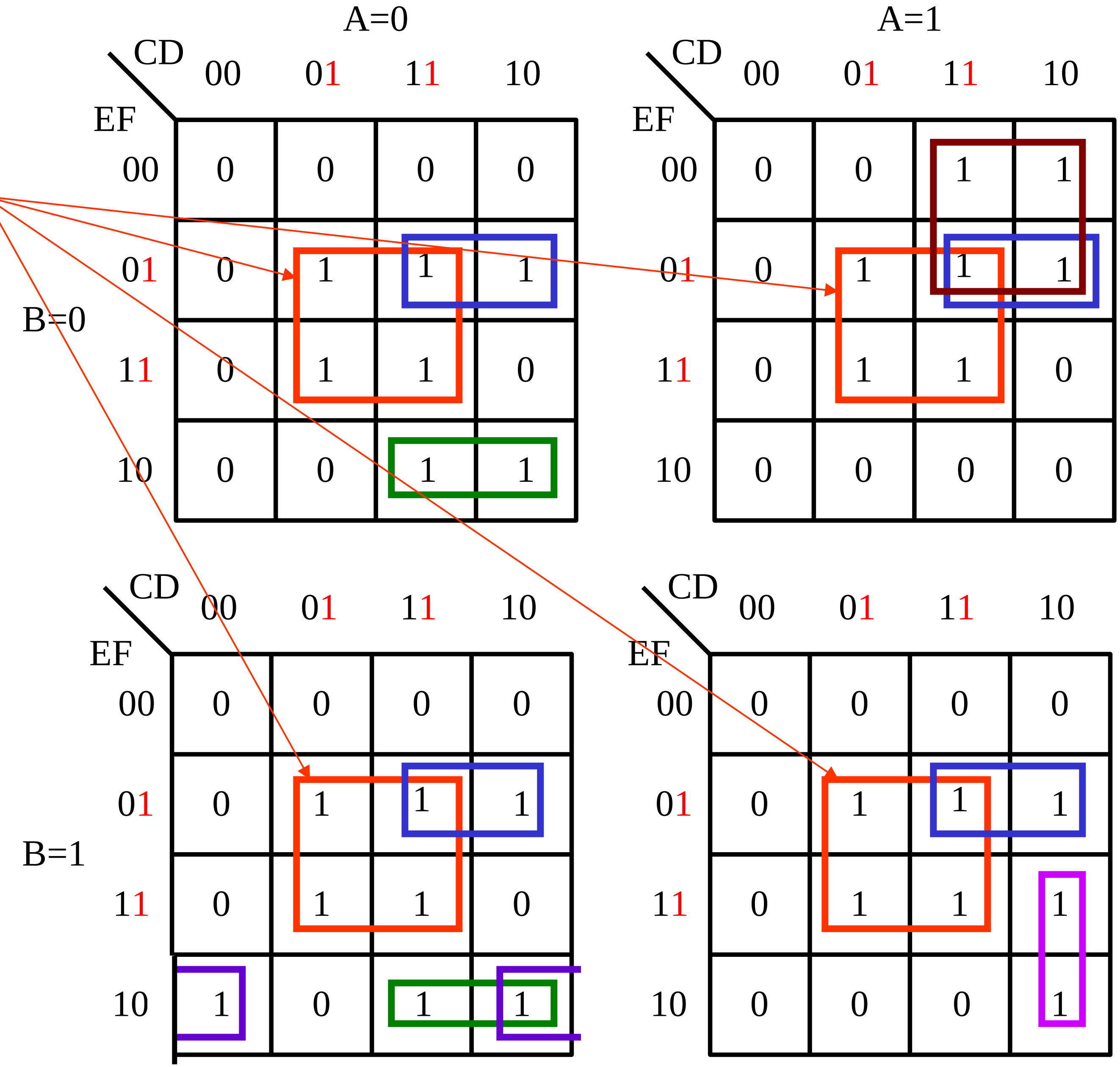
A=0, B=1

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

A=1, B=1

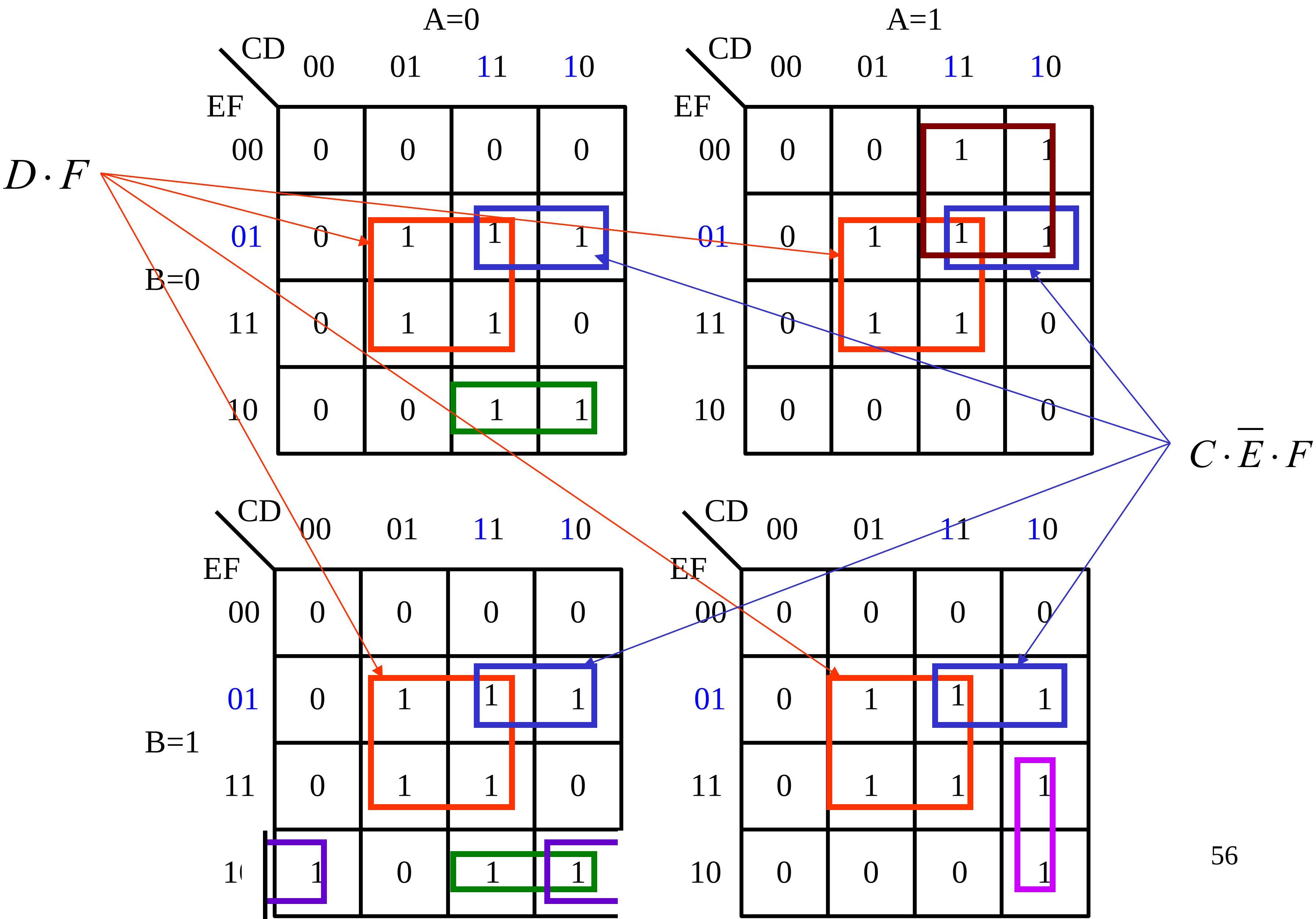
EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	0	1

$D \cdot F$



Για όσους βρόγχους <u>είναι κοινοί και στους τέσσερις πίνακες</u> παραλείπονται οι μεταβλητές A και B.

Επίσης, <u>αν ανά δύο οι πίνακες, κάθετα και οριζόντια, έχουν κοινές ομάδες</u>, τότε η μεταβλητή που αλλάζει παραλείπεται.


A=0
A=1
CD
EF
00 01 11 10
B=0
B=1
$D \cdot F$
$C \cdot \overline{E} \cdot F$
A=0, B=0: EF=00: 0 0 0 0; EF=01: 0 1 1 1; EF=11: 0 1 1 0; EF=10: 0 0 1 1
A=1, B=0: EF=00: 0 0 1 1; EF=01: 0 1 1 1; EF=11: 0 1 1 0; EF=10: 0 0 0 0
A=0, B=1: EF=00: 0 0 0 0; EF=01: 0 1 1 1; EF=11: 0 1 1 0; EF=10: 1 0 1 1
A=1, B=1: EF=00: 0 0 0 0; EF=01: 0 1 1 1; EF=11: 0 1 1 1; EF=10: 0 0 0 1

$D \cdot F$

$\overline{A} \cdot C \cdot E \cdot \overline{F}$

$C \cdot \overline{E} \cdot F$

B=0

A=0

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	1	1

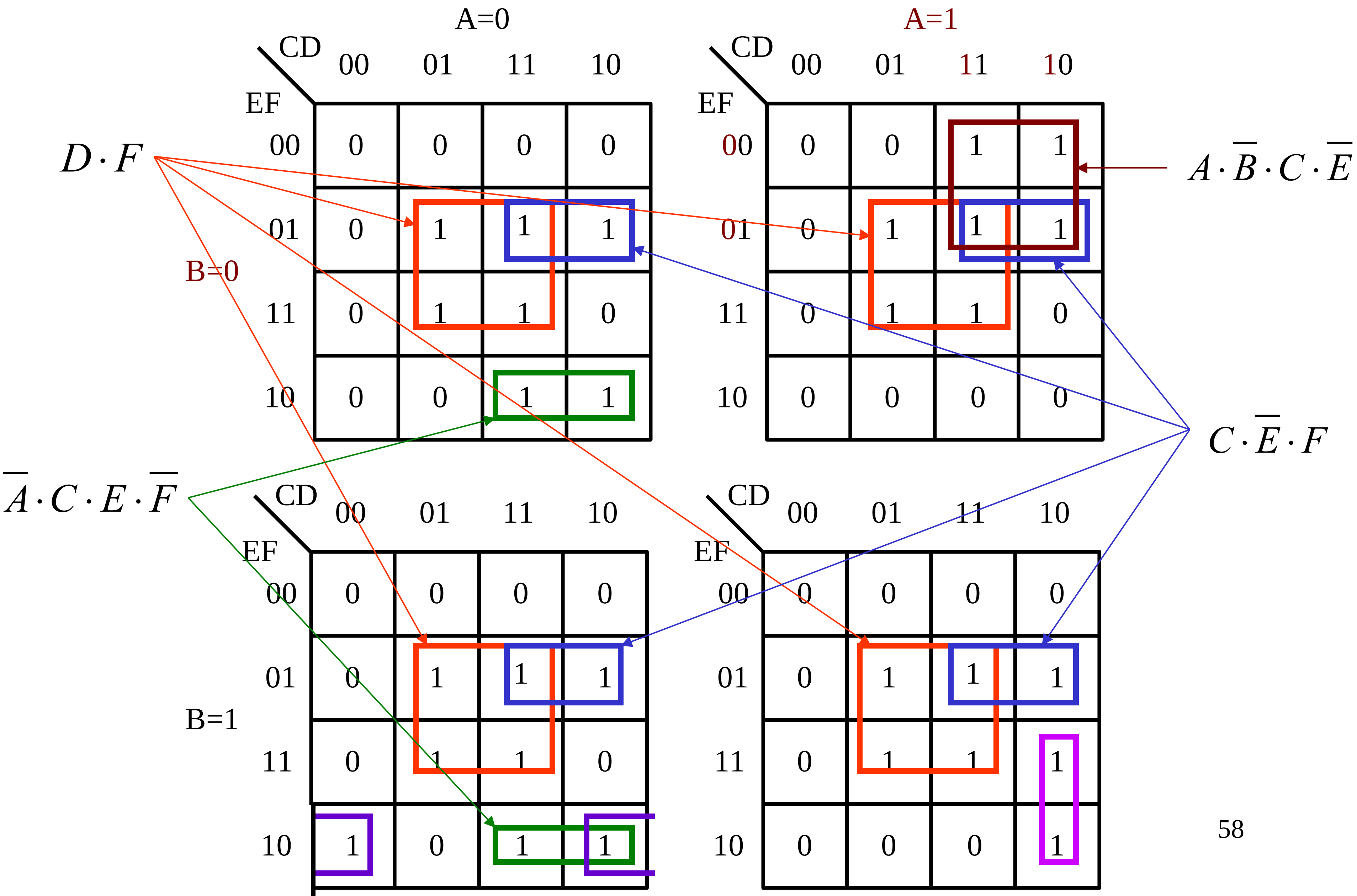
A=1

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

B=1

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	0	1


A=0
A=1
CD
EF
00
01
11
10
B=0
B=1
$D \cdot F$
$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{E}$
$C \cdot \overline{E} \cdot F$
$\overline{A} \cdot C \cdot E \cdot \overline{F}$

A=0 A=1

B=0

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	1	1

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

B=1

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	0	1

$D\cdot F$

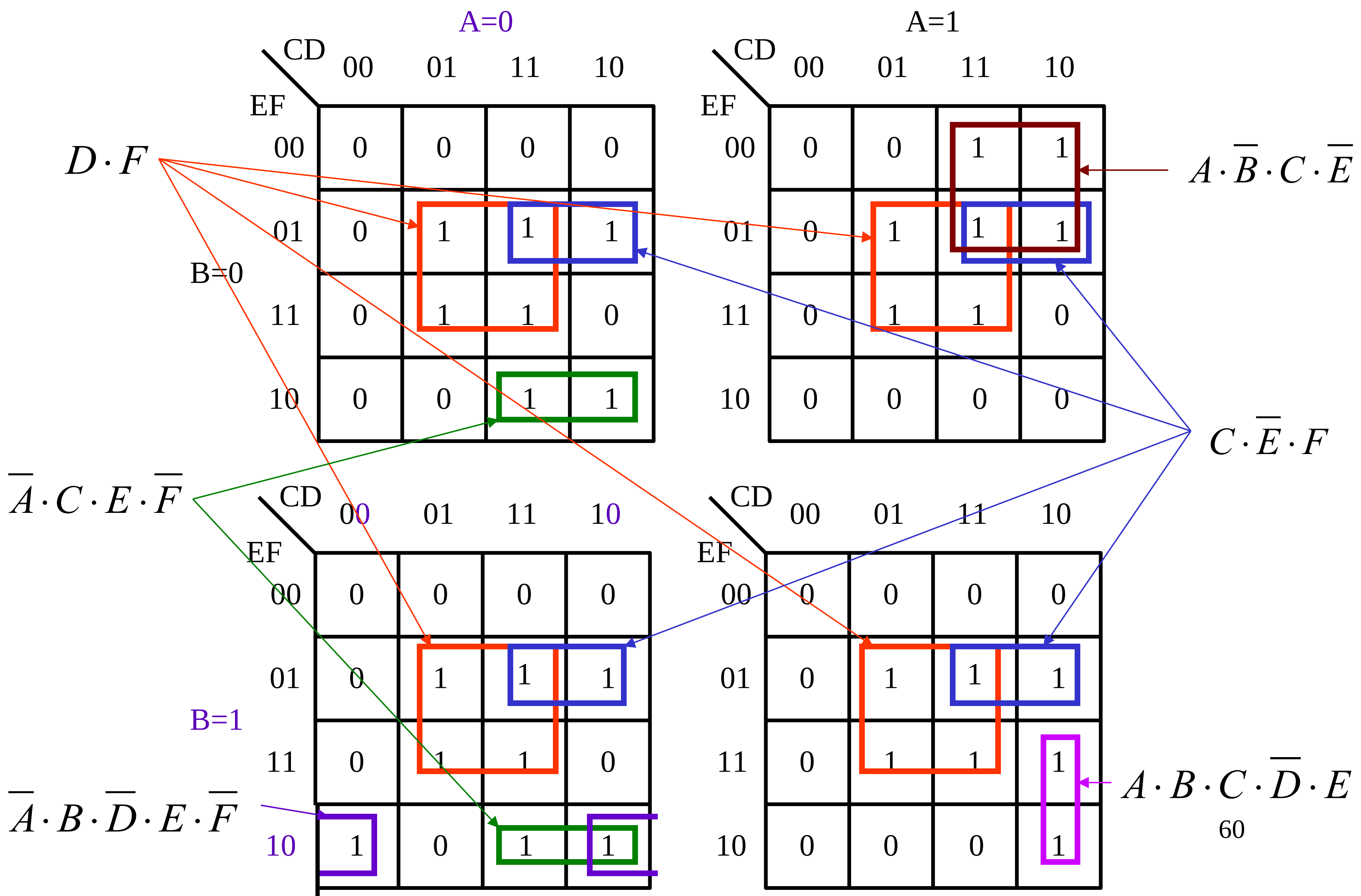
$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{E}$

$C\cdot\overline{E}\cdot F$

$\overline{A}\cdot C\cdot E\cdot\overline{F}$

$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}\cdot E$

$$f_{min} = D \cdot F + C \cdot \overline{E} \cdot F + \overline{A} \cdot C \cdot E \cdot \overline{F} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{D} \cdot E \cdot \overline{F} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{E} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} \cdot E$$



ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Πολλές φορές είναι πιο βολικό να παρθεί με τη χρήση του πίνακα Karnaugh η ελάχιστη συνάρτηση σε μορφή λογικού γινομένου αθροισμάτων, αρκεί ο πίνακας Karnaugh να συμπληρωθεί από τη συνάρτηση ελάχιστων όρων.

Στη συνέχεια η ελάχιστη συνάρτηση μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε μορφή αθροίσματος γινομένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.18

Απλοποιήστε τη συνάρτηση Boole: $\mathbf{F = \Sigma(0, 1, 4, 8, 9, 12)}$

α) Σε μορφή αθροίσματος γινομένων και β) σε μορφή γινομένου αθροισμάτων

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

Με συνδυασμούς των 1 παίρνουμε την απλοποιημένη F

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$(\overline{C} \cdot \overline{D})$

$(\overline{B} \cdot \overline{C})$

$$F = \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{C} \cdot \overline{D}$$

Με συνδυασμούς των 0 παίρνουμε την απλοποιημένη σε μορφή συμπληρώματος F’ σε αθροίσματα γινομένων και εφαρμόζουμε De Morgan για να έχουμε γινόμενο αθροισμάτων.

$$\bar{F} = (BD) + \mathrm{C},\ \text{άρα}\ F = \overline{(BD) + \mathrm{C}} = \boxed{(\bar{B} + \bar{D}) \cdot \bar{C}} = \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{C} \cdot \bar{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$(B \cdot D)$

C

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1

Στο λογικό κύκλωμα του σχήματος 4.1 δεν γίνεται οικονομία πυλών. Ζητούνται:

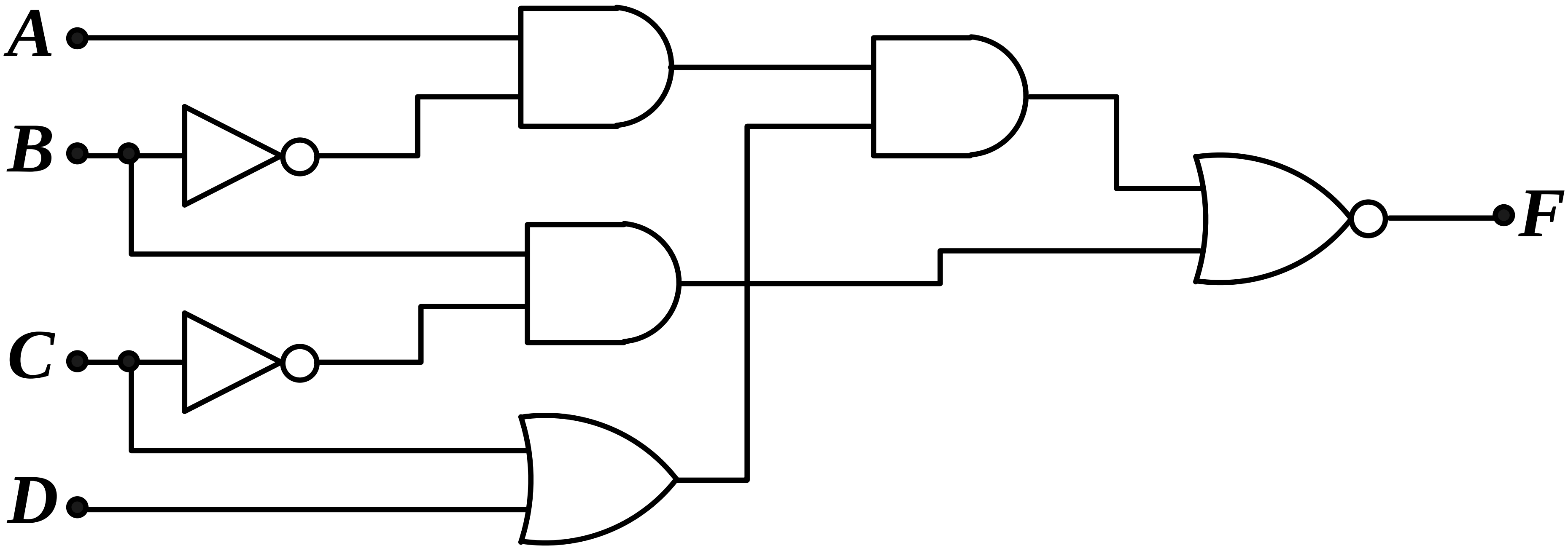
α. Να εξαχθεί η λογική συνάρτηση F.

β. Να παρθεί η συνάρτηση στην ελάχιστη μορφή της f_{min} χρησιμοποιώντας τους κανόνες της άλγεβρας Boole.

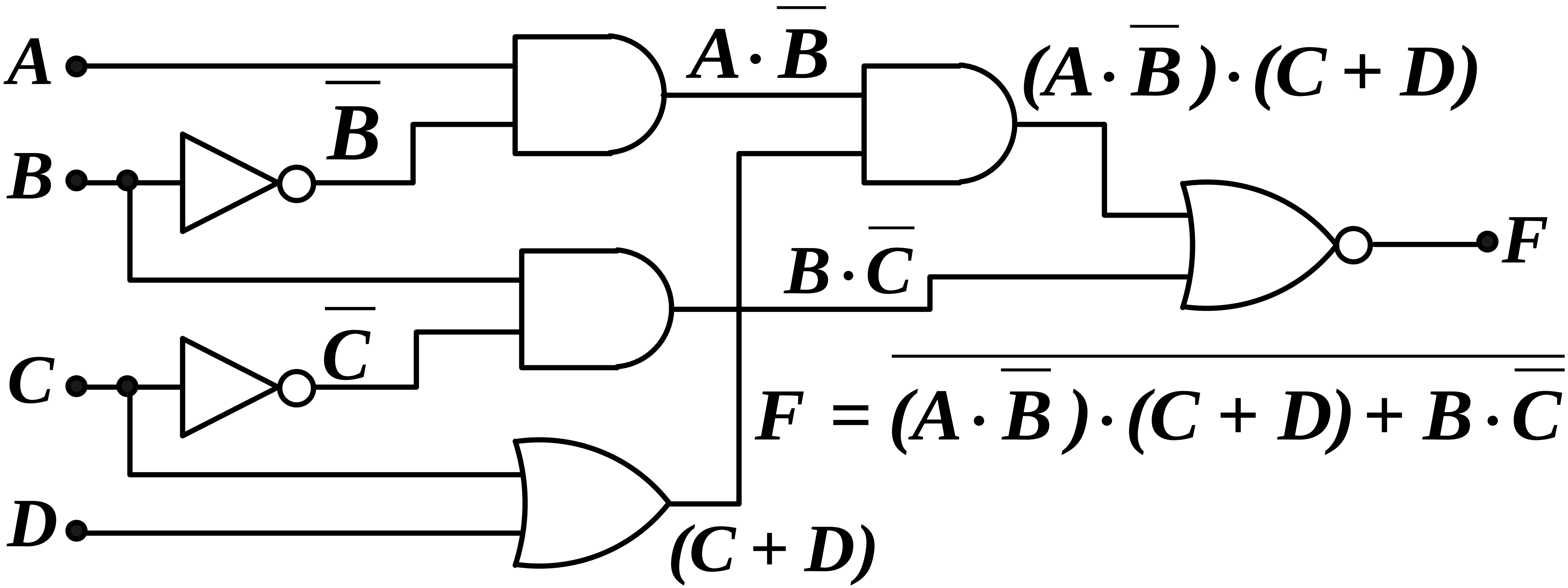
γ. Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με τον πίνακα Karnaugh.

δ. Από την f_{min} να κατασκευαστεί το ελάχιστο λογικό κύκλωμα χρησιμοποιώντας πύλες NOT, OR και AND και μη συμπληρωματικές μεταβλητές.

η λογική συνάρτηση F



α. Να εξαχθεί η λογική συνάρτηση F.



Επομένως, η ανάλυση του κυκλώματος θα δώσει τη λογική συνάρτηση *F*, η οποία περιγράφει πλήρως τη λειτουργία του κυκλώματος.

$$F = \overline{(A \cdot \overline{B}) \cdot (C + D) + B \cdot \overline{C}}$$

β. Να παρθεί η συνάρτηση στην ελάχιστη μορφή της f_{min} χρησιμοποιώντας τους κανόνες της άλγεβρας Boole.

$$F = \overline{A \cdot \overline{B} \cdot (C + D) + B \cdot \overline{C}}$$

$$= \overline{[A \cdot \overline{B} \cdot (C + D)]} \cdot \overline{[B \cdot \overline{C}]}$$

$$= [\overline{A \cdot \overline{B}} + \overline{(C + D)}][\overline{B} + \overline{\overline{C}}]$$

$$= [\overline{A} + B + \overline{C} \cdot \overline{D}] \cdot [\overline{B} + C]$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot C + B \cdot \overline{B} + B \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + C \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot C + 0 + B \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + 0$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot C + B \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot C \cdot (B + \overline{B}) + B \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (1 + C) + B \cdot C \cdot (1 + \overline{A}) + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$

$$= F_{min}$$

γ. Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με τον πίνακα Karnaugh.

$$F = \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + B\cdot C + \overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$

$$= \overline{A}\cdot\overline{B}(C + \overline{C}) + \overline{A}\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C +$$

$$B\cdot C(A + \overline{A}) + \overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}(A + \overline{A})$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} +$$

$$\overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$$

$$+ ABCD + ABC\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

= 0111 0010 0001 0000 0111 0110 0011 0010 1111 1110
0111 0110 1000 0000

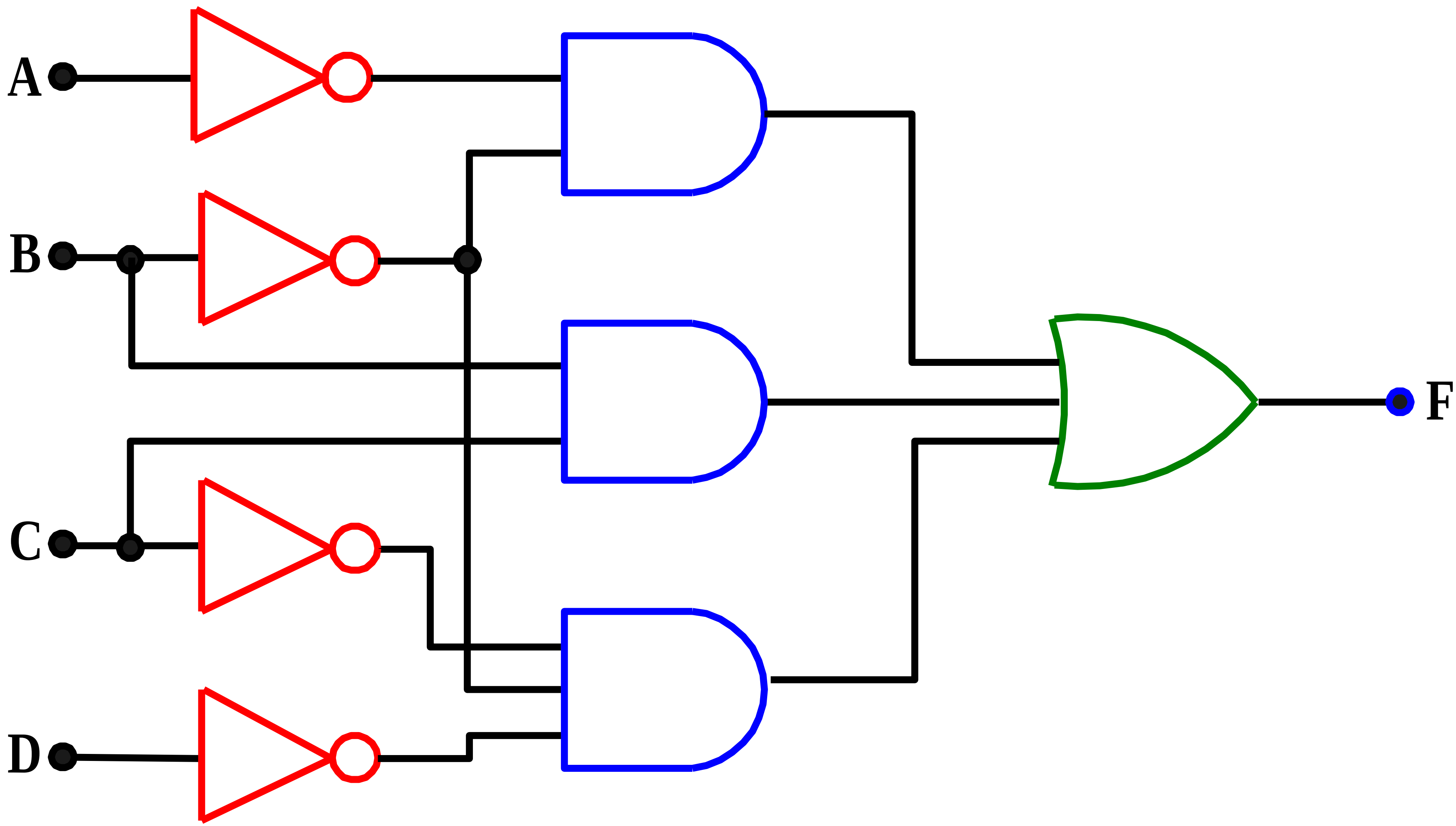
= 7 2 1 0 7 6 3 2 15 14 7 6 8 0

$$F = \Sigma(0,1,2,3,6,7,8,14,15)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	1	1	1	0

$$\mathrm{Fmin} = \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$

δ. Από την $F_{min} = \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$ συντίθεται το ελάχιστο κύκλωμα μόνο με πύλες NOT, OR και AND.



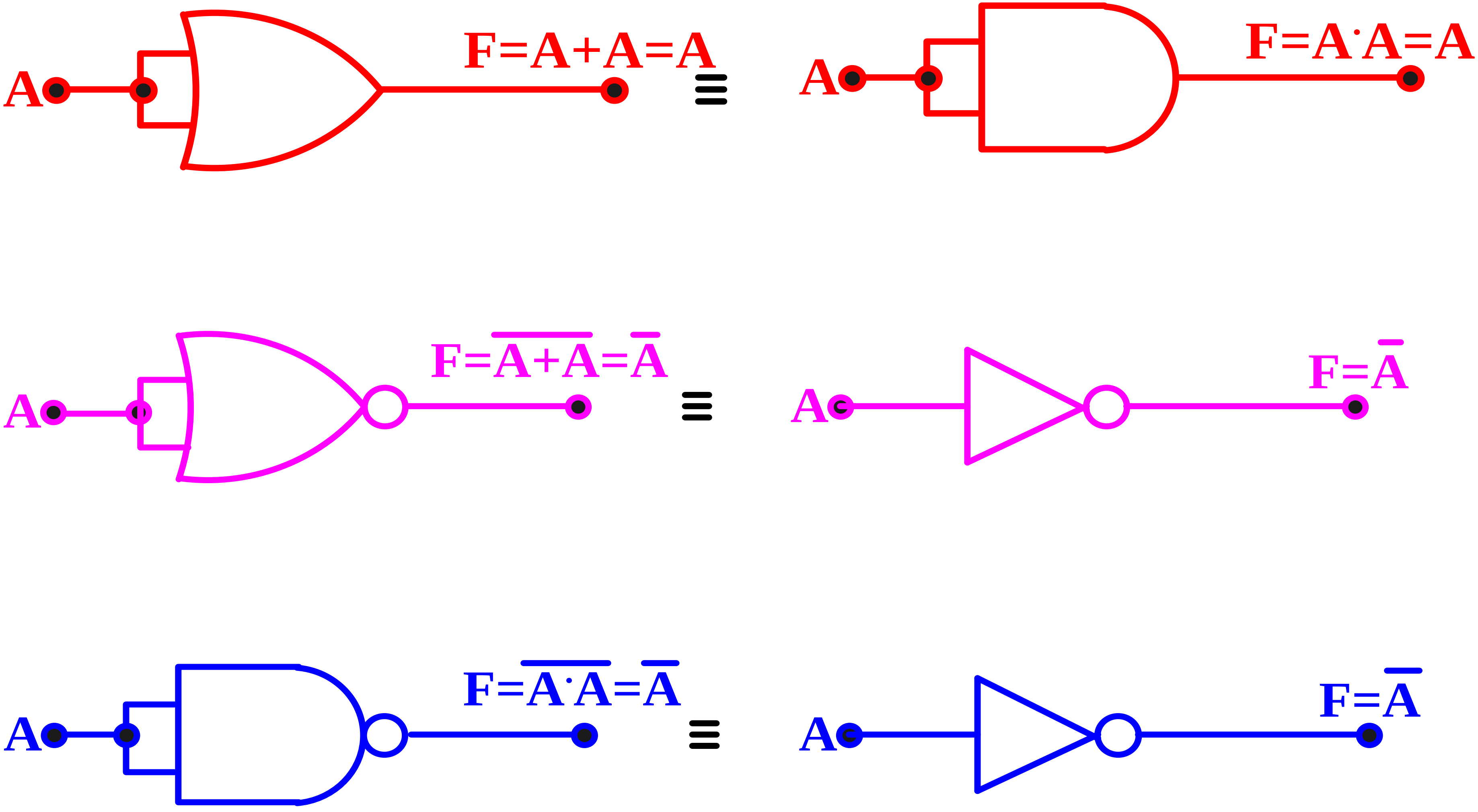
Ισοδυναμίες πυλών

Περίπτωση 1: Αντικατάσταση της πύλης NOT με πύλες NOR και NAND.

Στην άλγεβρα Boole ισχύει $A + A = A$ και $A \cdot A = A$.

Αυτό σημαίνει ότι αν βραχυκυκλωθούν οι είσοδοι μιας πύλης OR ή μιας πύλης AND η έξοδος θα είναι ό,τι και η είσοδος.

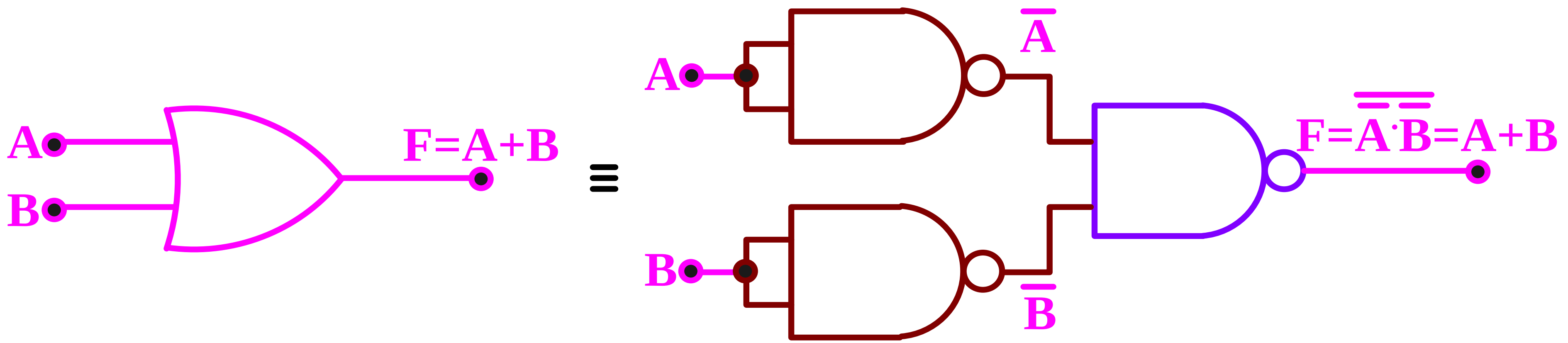
Με την ίδια λογική αν βραχυκυκλωθούν οι είσοδοι των πυλών NOR και NAND αυτές θα λειτουργήσουν σαν αρνήσεις.


A
$F=A+A=A$
≡
A
$F=A\cdot A=A$
A
$F=\overline{A+A}=\overline{A}$
≡
A
$F=\overline{A}$
A
$F=\overline{A\cdot A}=\overline{A}$
≡
A
$F=\overline{A}$

Περίπτωση 2: **Στην άλγεβρα Boole ισχύει:**

$$A+B=\overline{\overline{A+B}}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$$

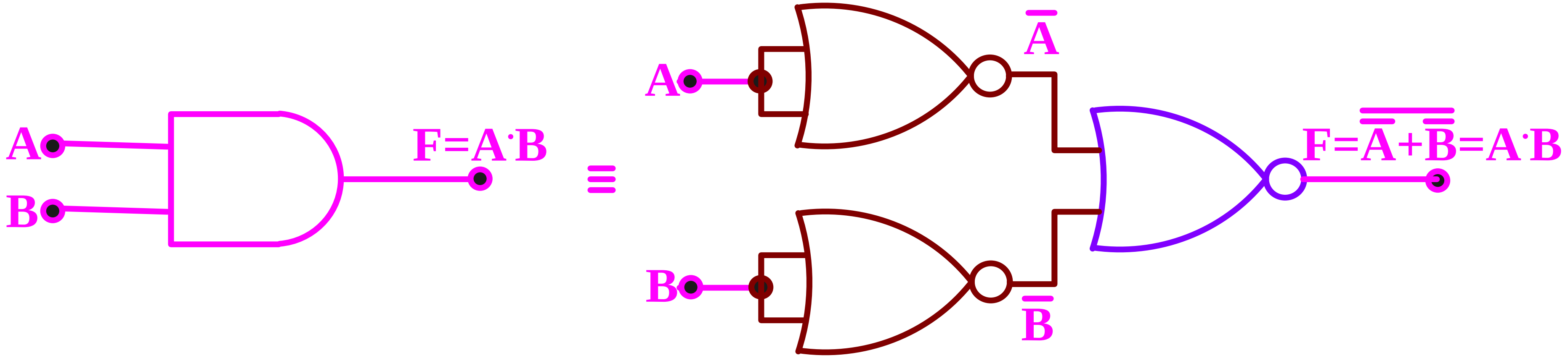
Αυτό σημαίνει ότι μία πύλη OR μπορεί να αντικατασταθεί με τρεις πύλες NAND.



Περίπτωση 3: Στην άλγεβρα Boole ισχύει:

$$A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

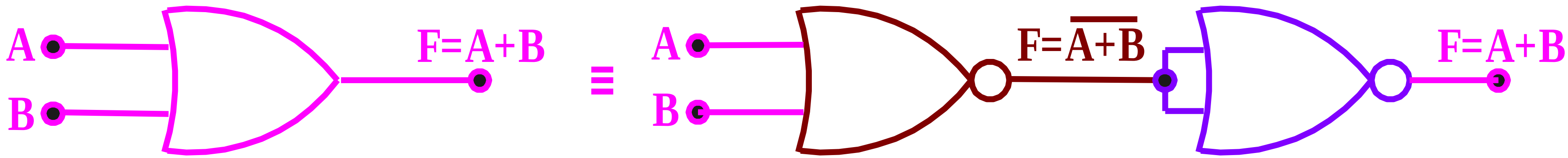
Αυτό σημαίνει ότι μία πύλη AND μπορεί να αντικατασταθεί με τρεις πύλες NOR.



Περίπτωση 4: Στην άλγεβρα Boole ισχύει: .

$$A+B=\overline{\overline{A+B}}$$

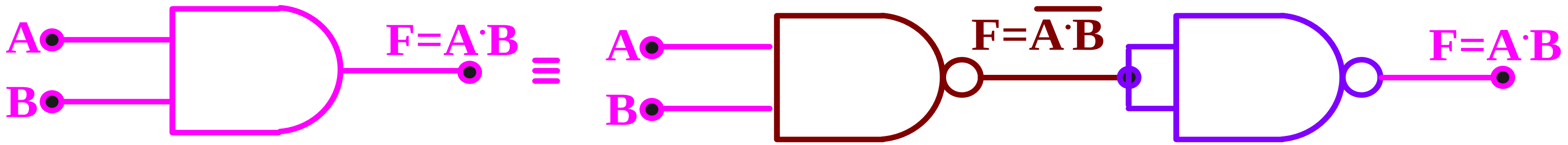
Αυτό σημαίνει ότι μία πύλη OR μπορεί να αντικατασταθεί με δύο πύλες NOR.



Περίπτωση 5: **Στην άλγεβρα Boole ισχύει:**

$$A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$$

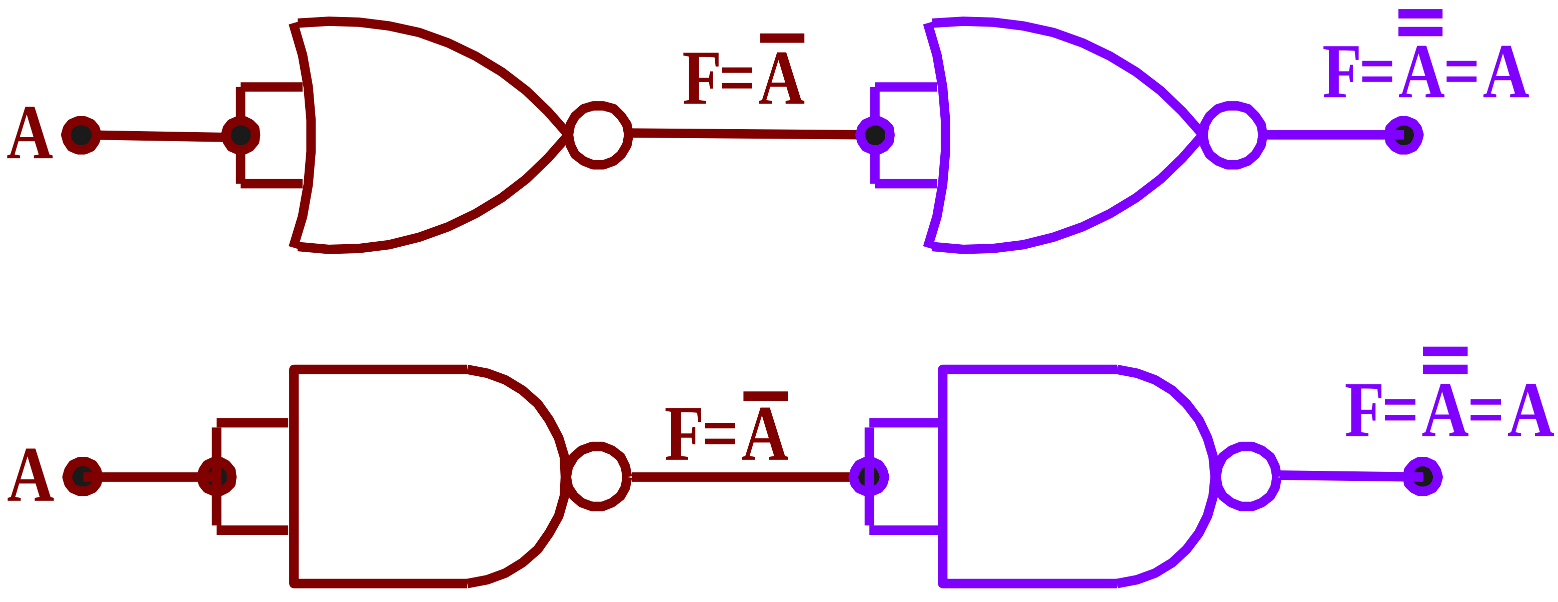
Αυτό σημαίνει ότι μία πύλη AND μπορεί να αντικατασταθεί με δύο πύλες NAND.



Περίπτωση 6: **Στην άλγεβρα Boole ισχύει:**

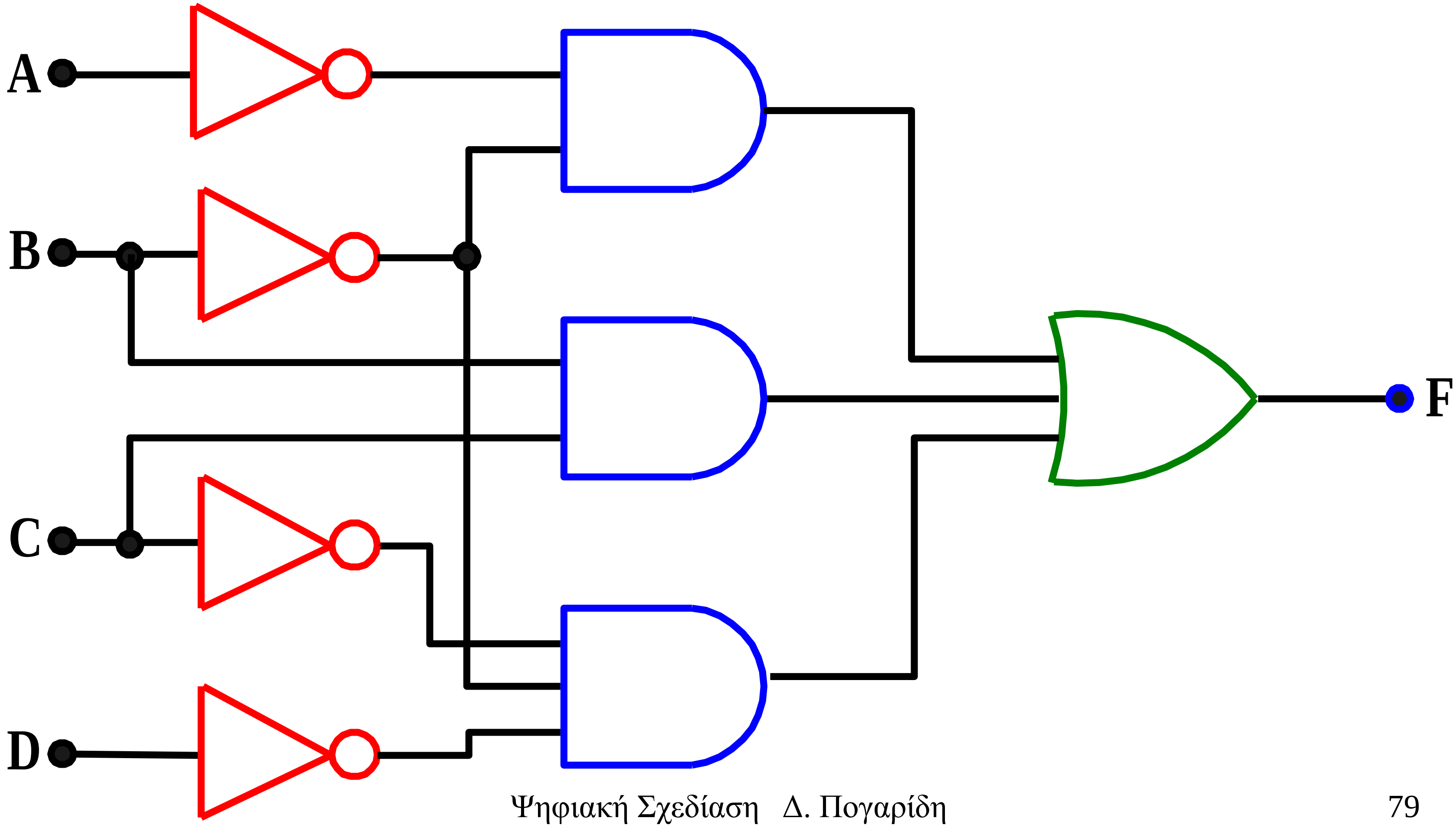
$$A = \overline{\overline{A}}$$

Αυτό σημαίνει ότι δύο πύλες NAND ή δύο πύλες NOR με βραχυκυκλωμένες εισόδους συνδεδεμένες σε σειρά μπορούν να αντικατασταθούν με βραχυκύκλωμα.

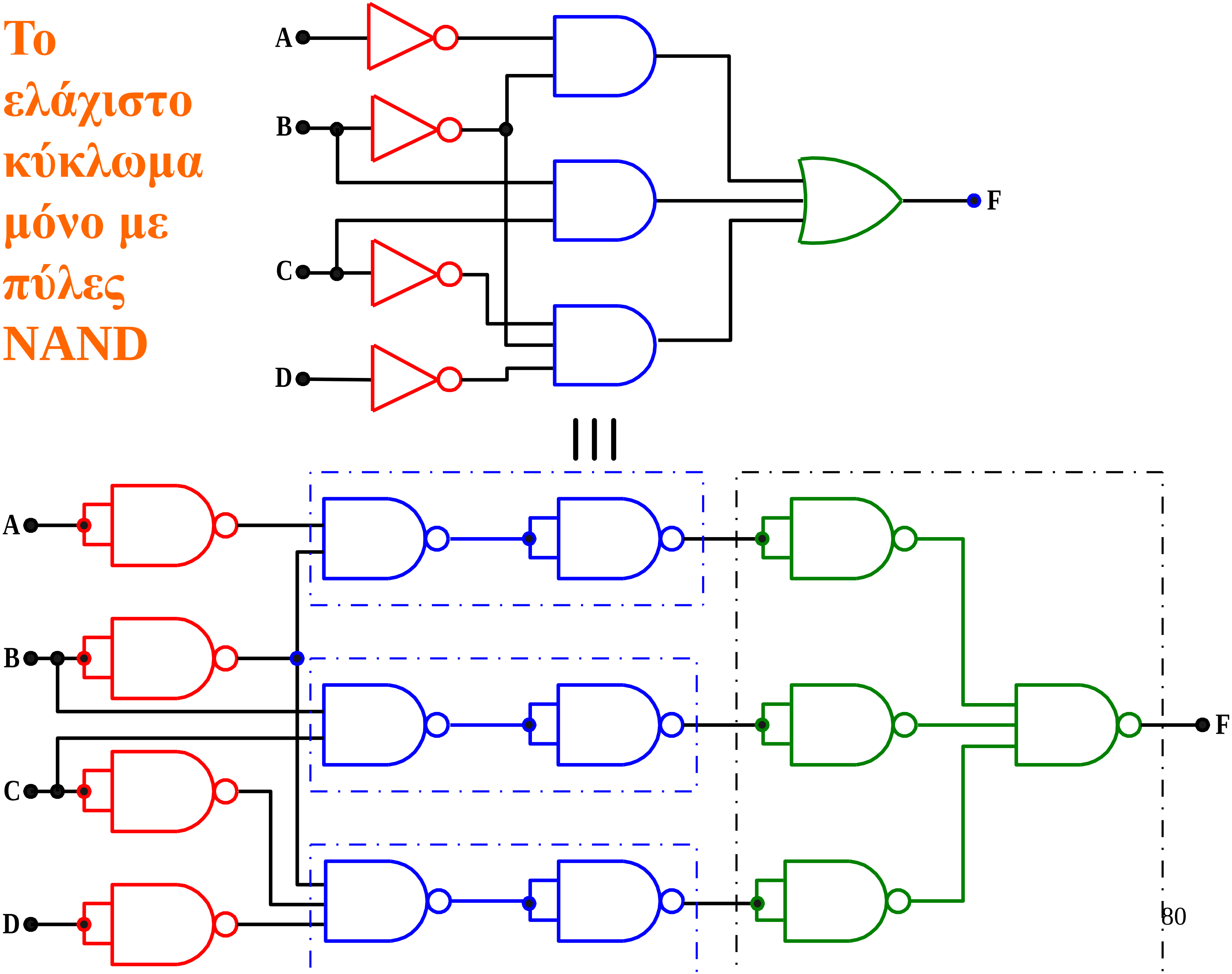


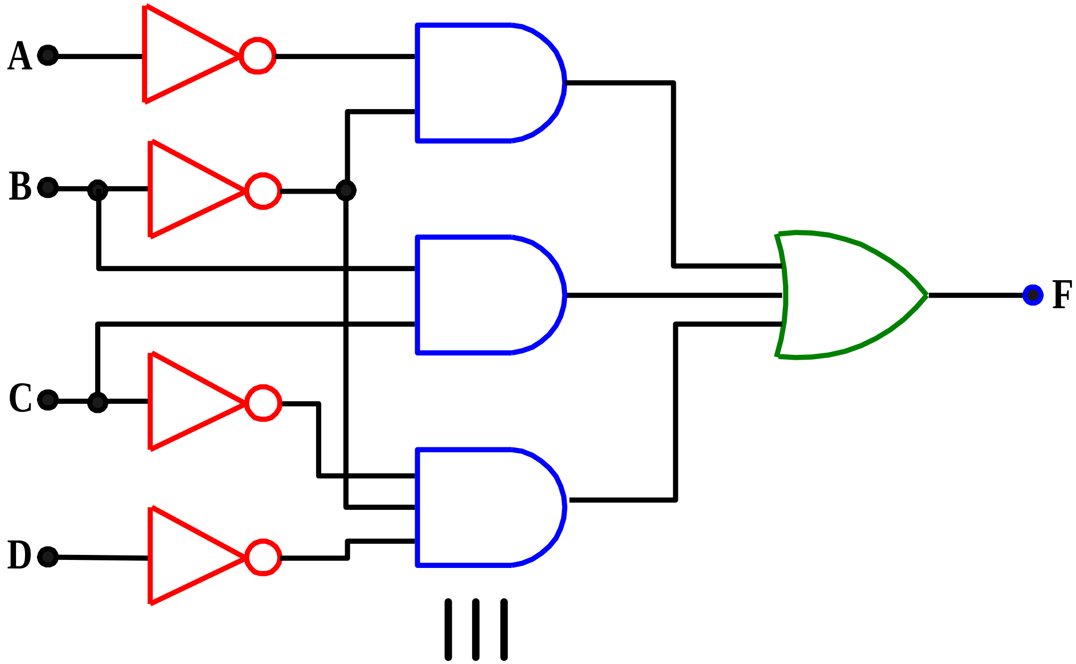
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2

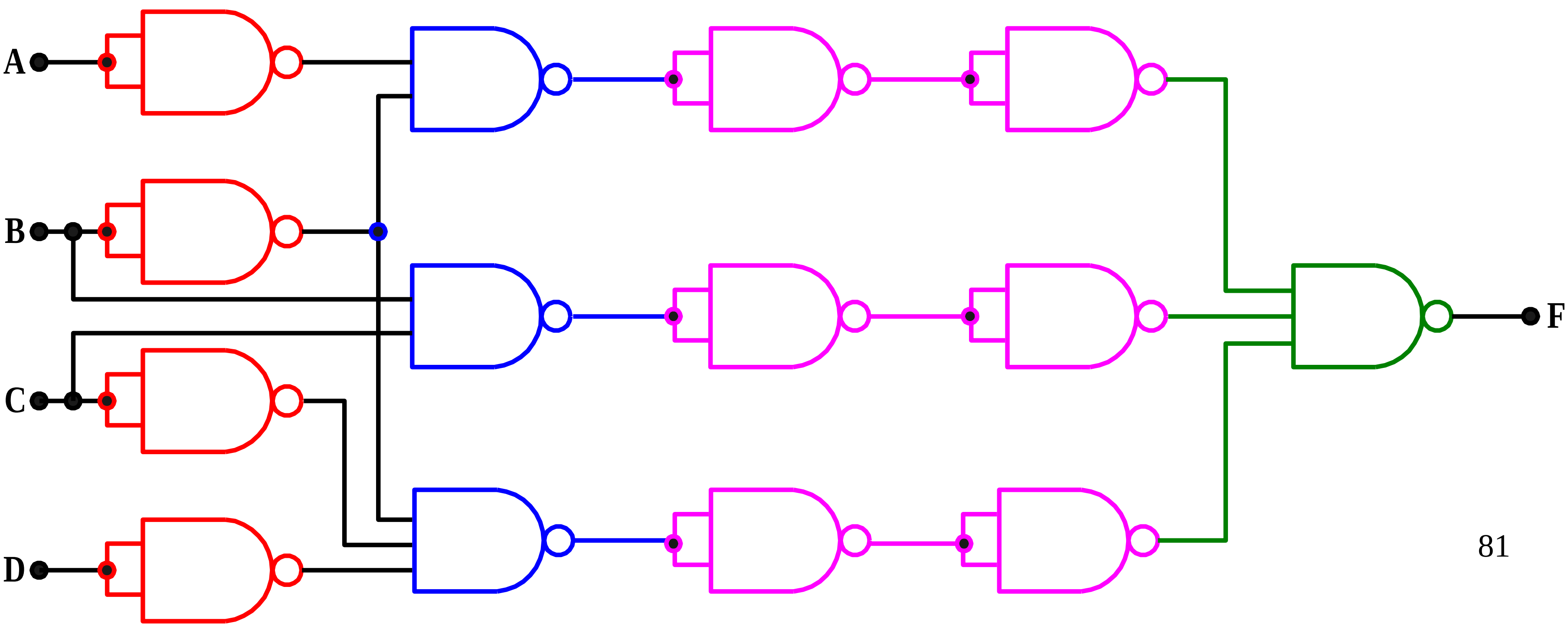
Εφαρμόζοντας τις ισοδυναμίες πυλών να παρθεί το ελάχιστο κύκλωμα του παραδείγματος 4.1 καταρχήν μόνο με πύλες NAND και στη συνέχεια μόνο με πύλες NOR.

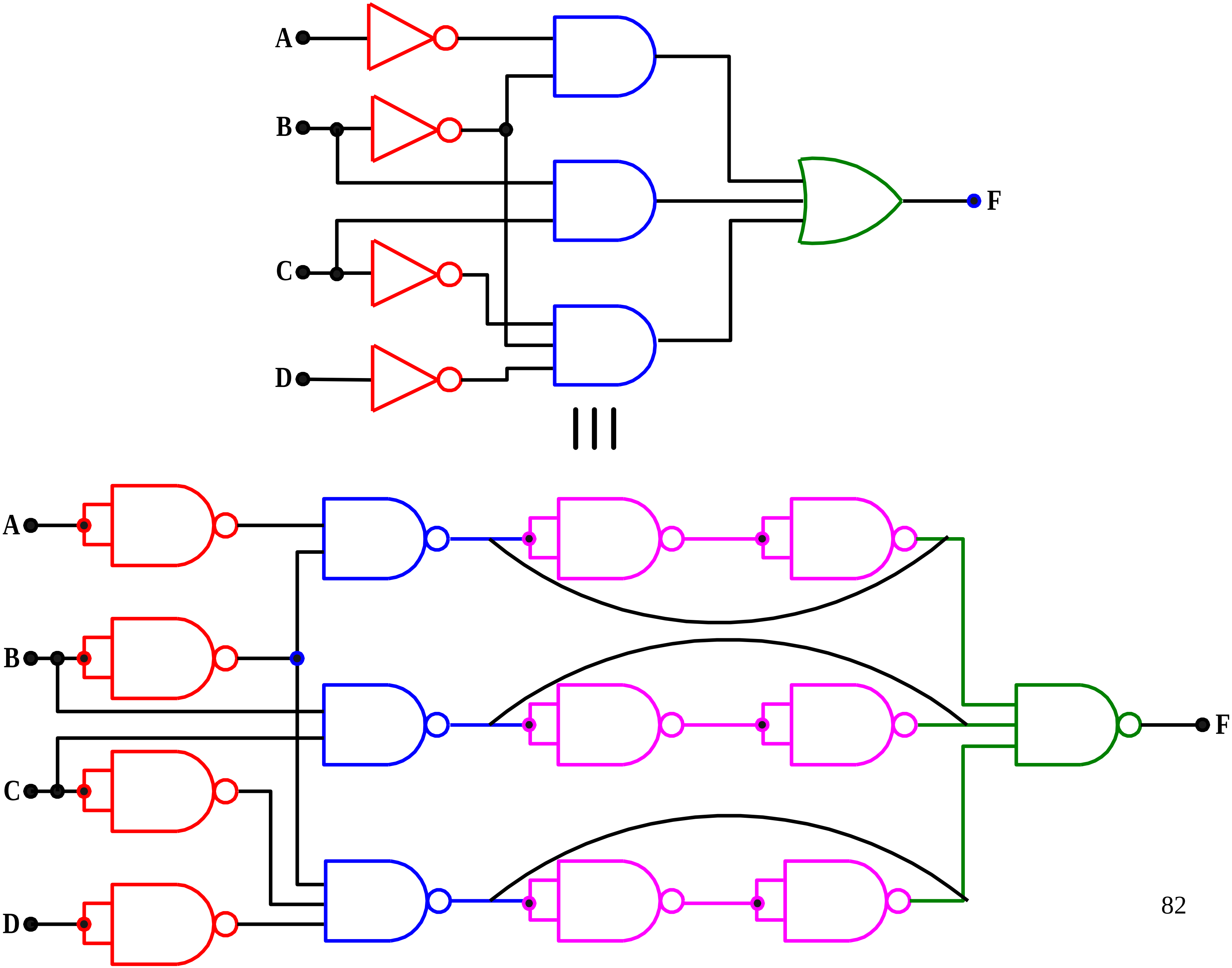


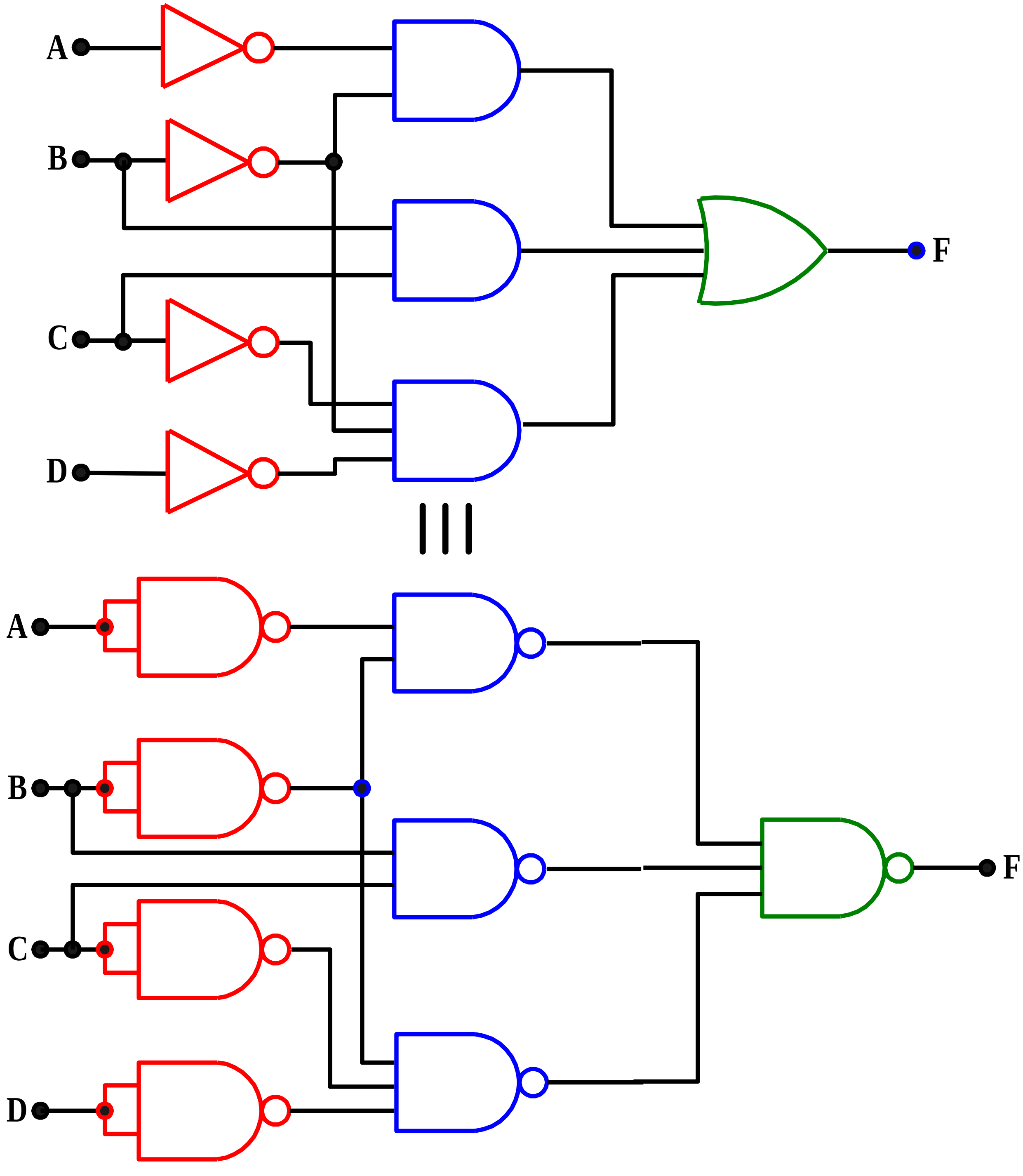
Το ελάχιστο κύκλωμα μόνο με πύλες NAND



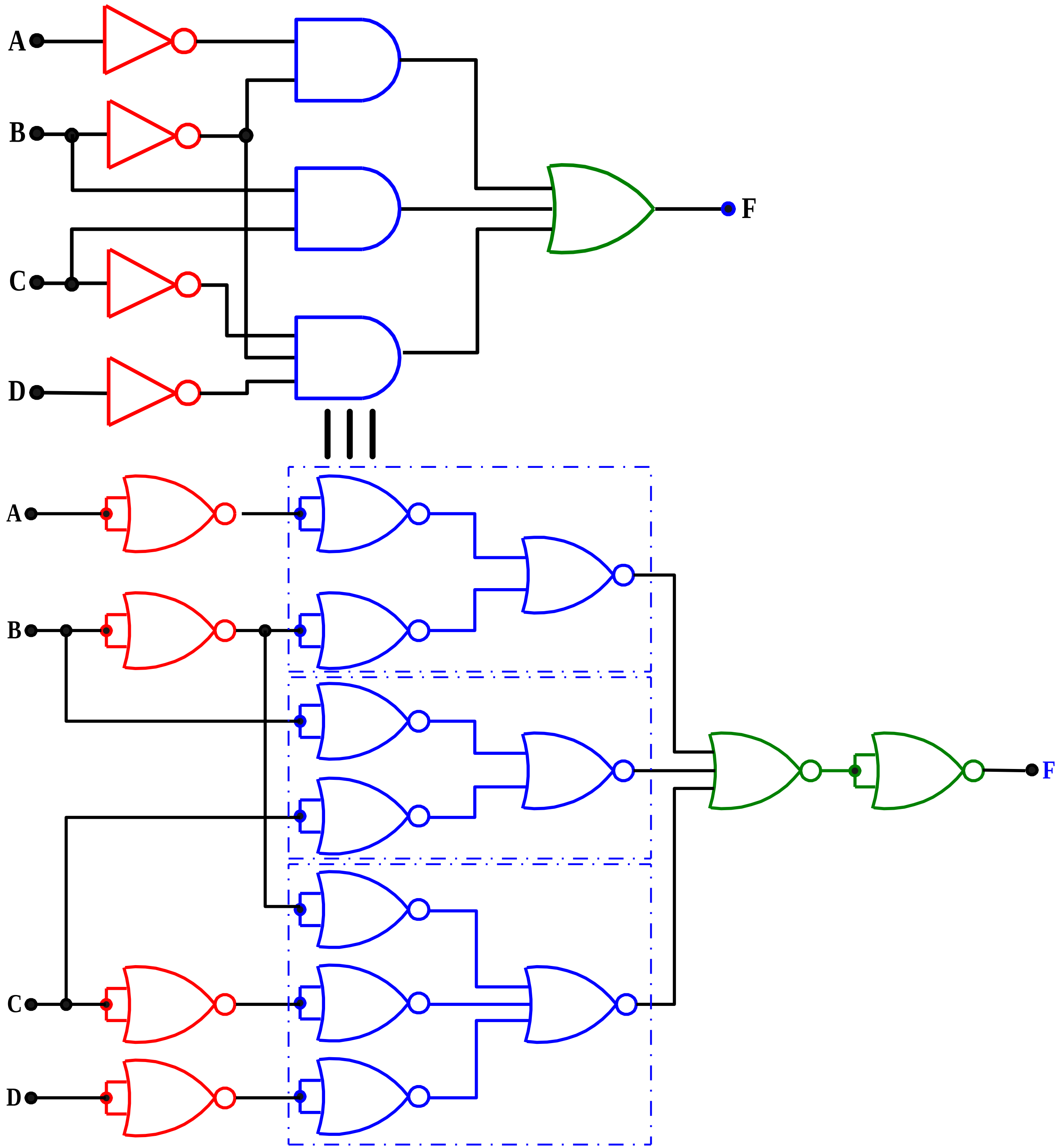

A
B
C
D
F

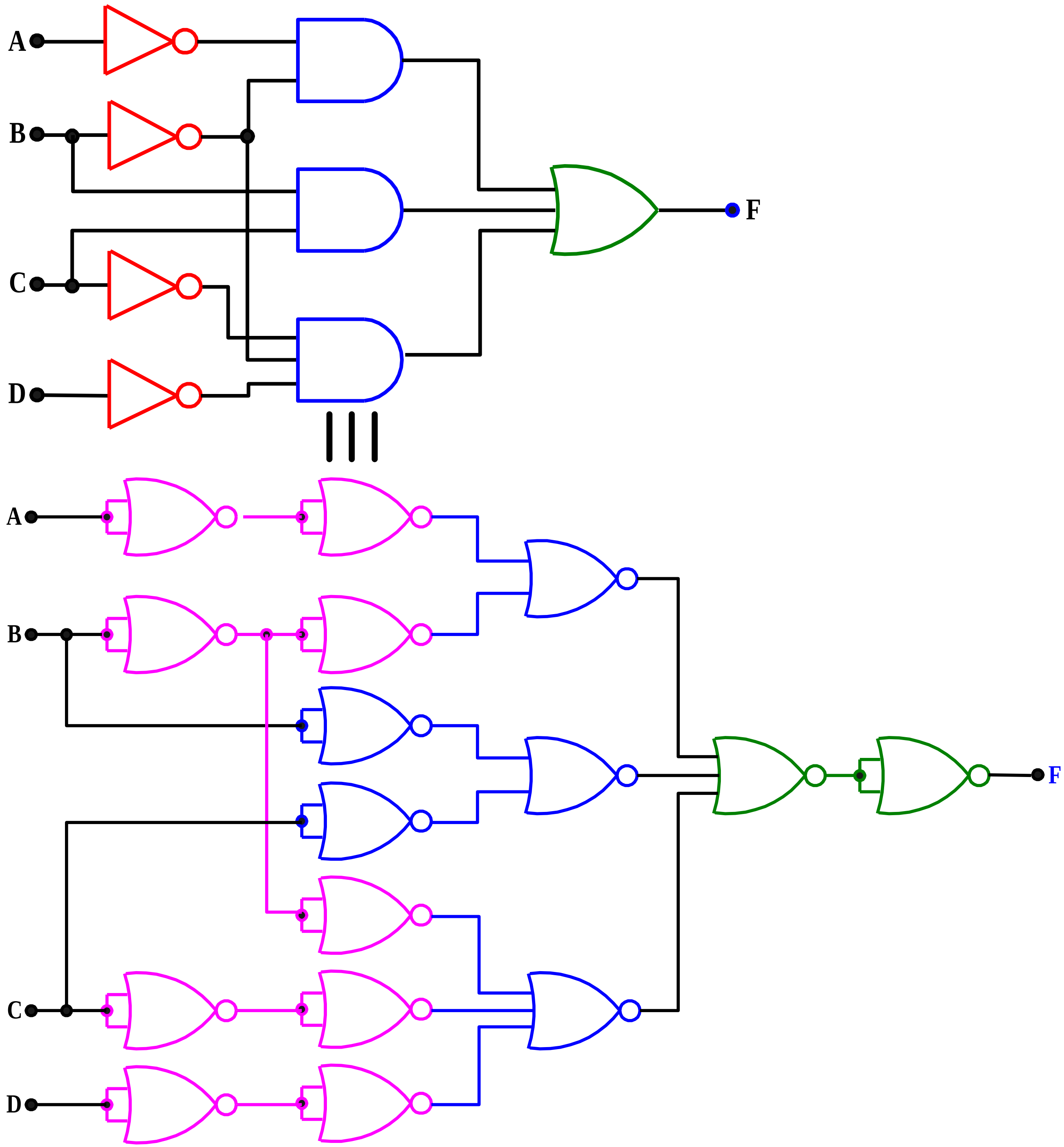

A
B
C
D
F

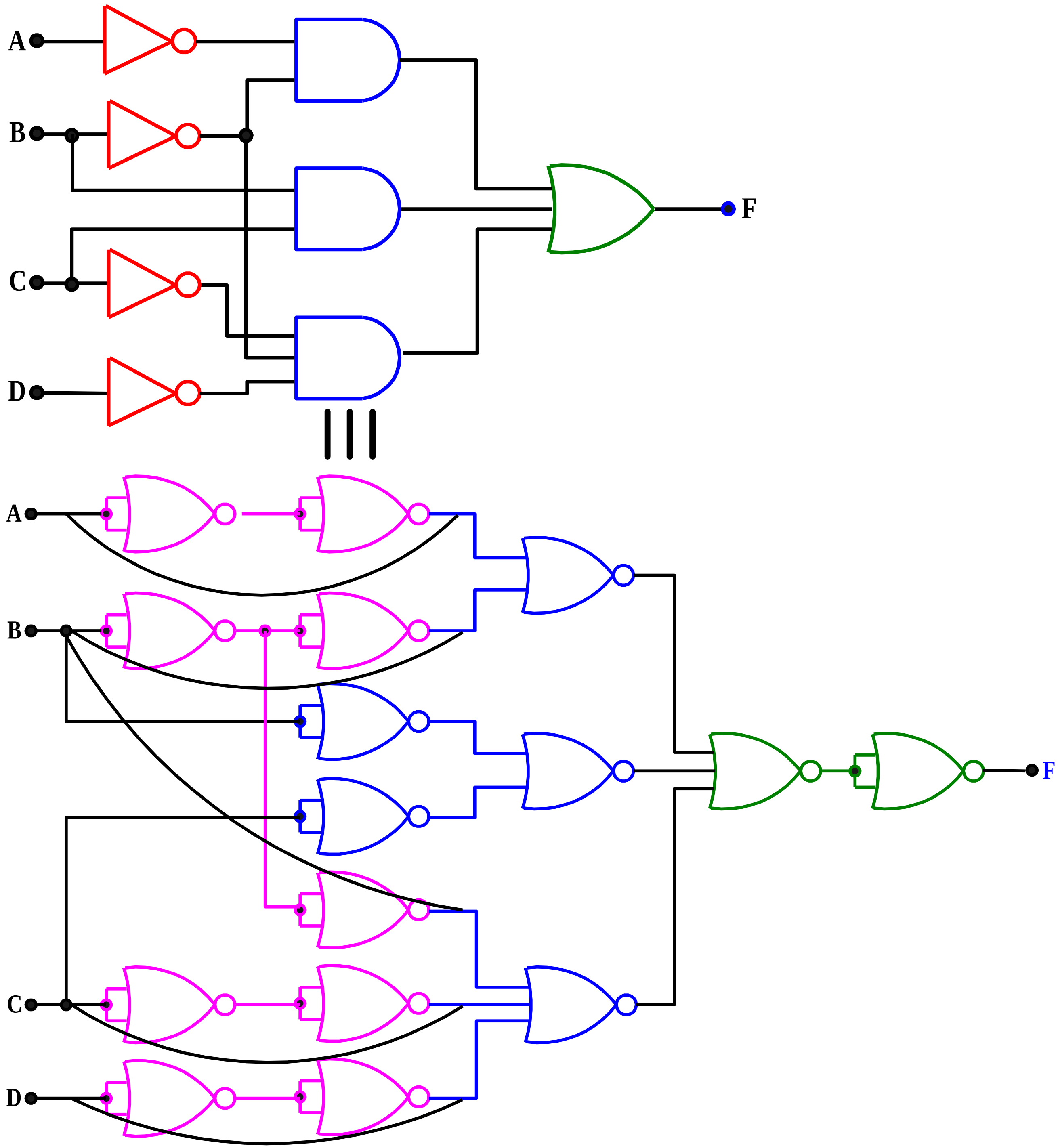

A
B
C
D
F
A
B
C
D
F

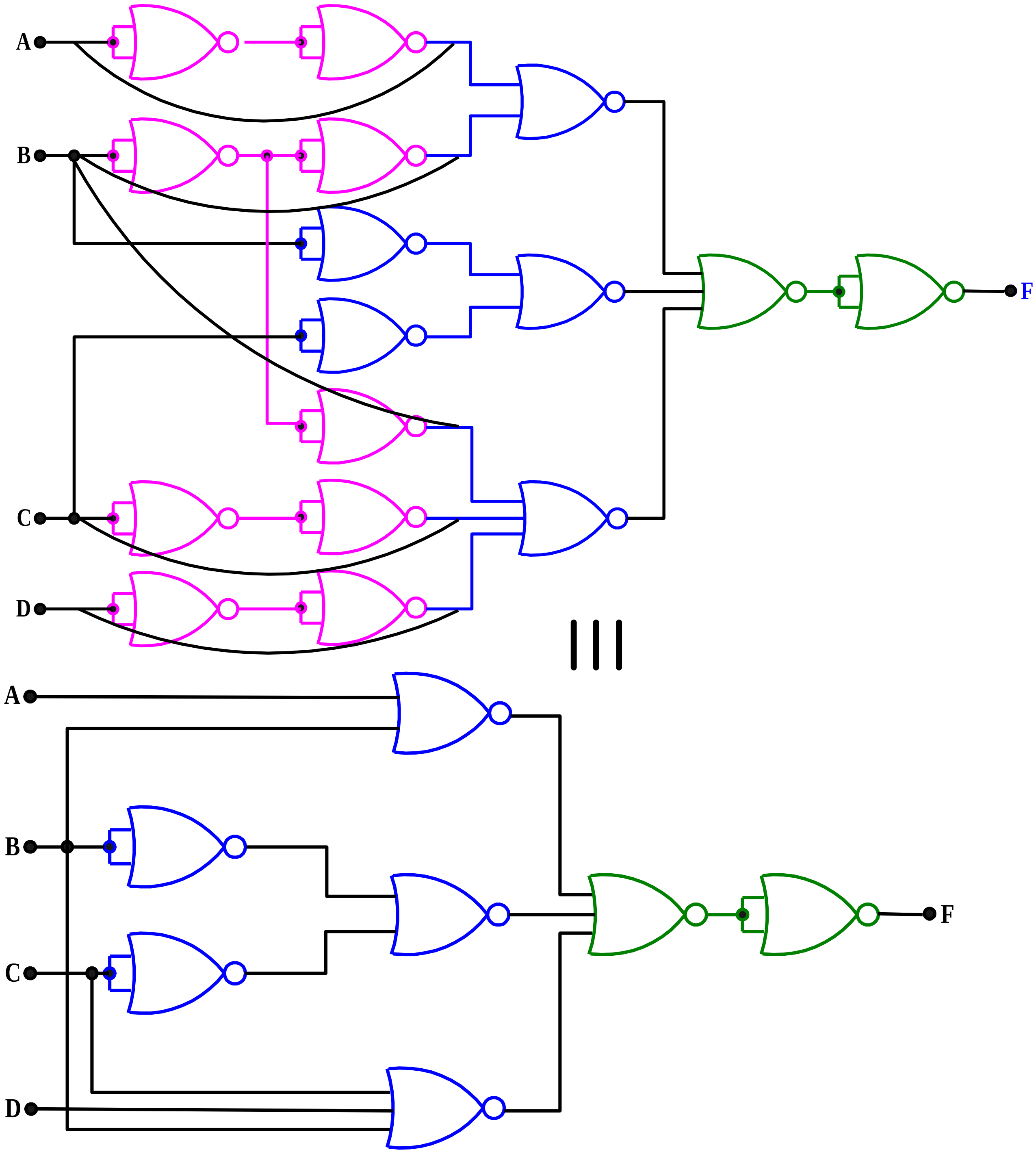

A
B
C
D
F
A
B
C
D
F

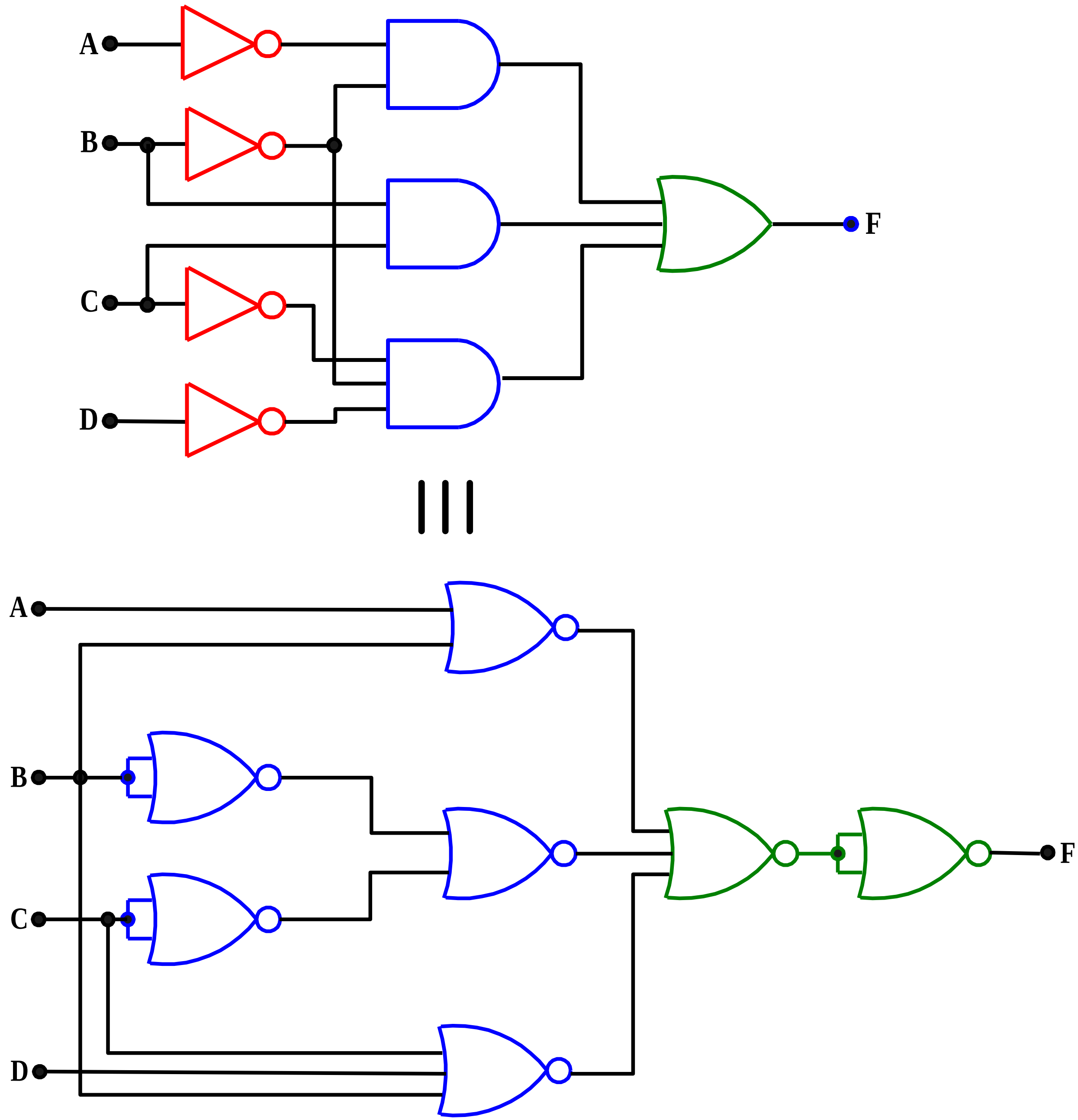
Το ελάχιστο κύκλωμα μόνο με πύλες NOR




A
B
C
D
F
A
B
C
D
F


A
B
C
D
F
A
B
C
D
F


A
B
C
D
F
A
B
C
D
F

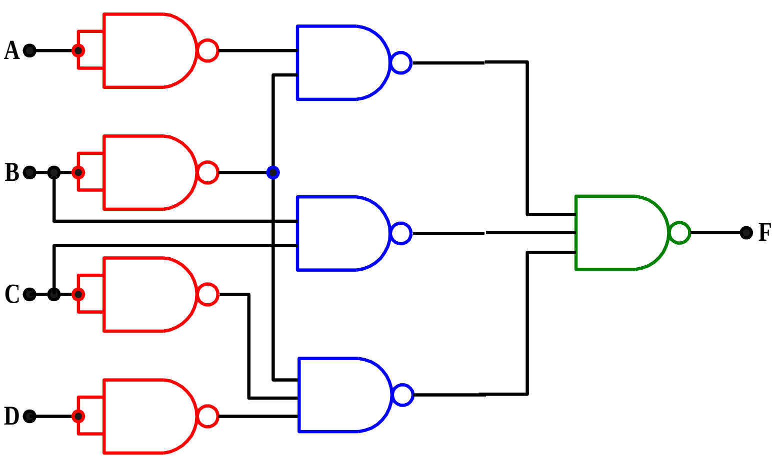

A
B
C
D
F
A
B
C
D
F

Το κύκλωμα μόνο με NAND - NOR με άλγεβρα Boole:

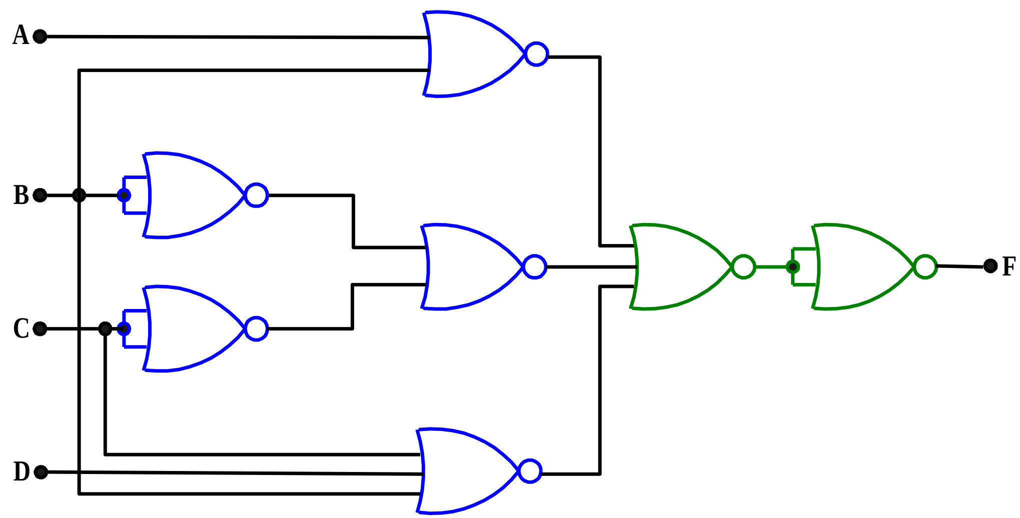
$$F=\bar{A}\cdot\bar{B}+(B\cdot C)+\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}=\overline{\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}+(B\cdot C)+\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}}}=$$

$$\boxed{=\overline{\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}}\cdot(\overline{B\cdot C})\cdot\overline{\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}}}}=\overline{(A+B)\cdot(\bar{B}+\bar{C})\cdot(B+C+D)}=$$

$$=\overline{(A+B)}+\overline{(\bar{B}+\bar{C})}+\overline{(B+C+D)}=\boxed{\overline{\overline{\overline{(A+B)}+\overline{(\bar{B}+\bar{C})}+\overline{(B+C+D)}}}}$$



NAND



NOR

ΑΔΙΑΦΟΡΟΙ ΟΡΟΙ

Σε πολλές εφαρμογές οι έξοδοι δεν επηρεάζονται από κάποιες καταστάσεις των εισόδων είτε αυτές είναι «0» είτε «1».

Στις περιπτώσεις αυτές οι είσοδοι των καταστάσεων ονομάζονται αδιάφοροι όροι και κατά την ελαχιστοποίηση των συναρτήσεων μπορούν να θεωρηθούν είτε ως «0» είτε ως «1».

Οι όροι αυτοί ονομάζονται αδιάφοροι όροι και συμβολίζονται με X.

Άσκηση

Δίνεται ο παρακάτω Πίνακας Αληθείας:

Είσοδοι				**Έξοδος**
Δεκαδικός	**A**	**B**	**C**	**F**
0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**X**
2	**0**	**1**	**0**	**0**
3	**0**	**1**	**1**	**1**
4	**1**	**0**	**0**	**0**
5	**1**	**0**	**1**	**1**
6	**1**	**1**	**0**	**1**
7	**1**	**1**	**1**	**0**

1. Να γραφεί σε άθροισμα ελαχίστων όρων η συνάρτηση F.
2. Να βρεθεί με πίνακες Karnaugh η ελάχιστη μορφή της Fmin.
3. Να υλοποιηθεί το οικονομικότερο δυνατό κύκλωμα χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NOR και μη συμπληρωματικές.
4. Να υλοποιηθεί το οικονομικότερο δυνατό κύκλωμα χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NAND και μη συμπληρωματικές.

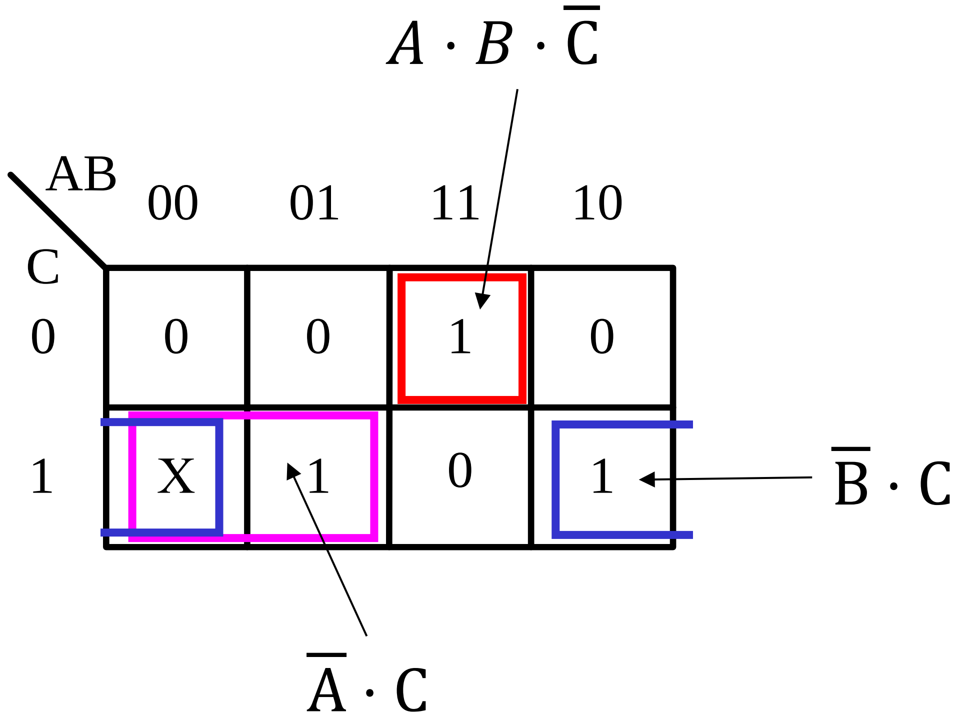
$F = \sum(3,5,6), \quad A.O. = 1$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	X	1	0	1

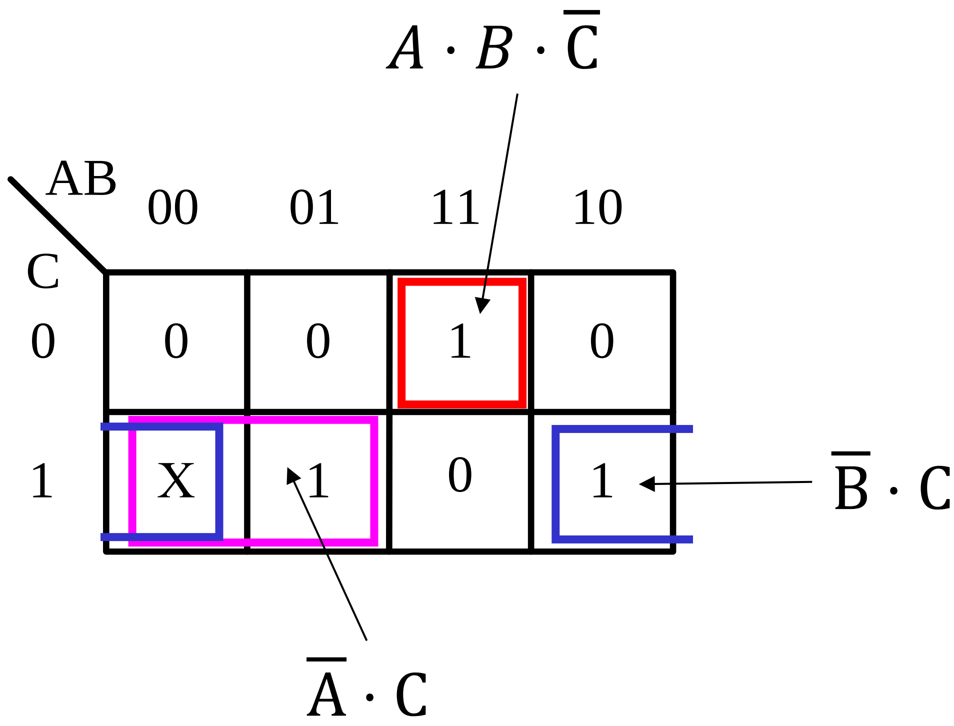
$F = \sum(3,5,6), \quad A.O. = 1$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	X	1	0	1

$F = \sum(3,5,6), \quad A.O. = 1$



$F = \sum(3,5,6), \quad A.O. = 1$



$$F = (A \cdot B \cdot \overline{C}) + \overline{A} \cdot C + \overline{B} \cdot C = \overline{\overline{(A \cdot B \cdot \overline{C}) + \overline{A} \cdot C + \overline{B} \cdot C}} =$$

$$\boxed{= \overline{\overline{A \cdot B \cdot \overline{C}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot C} \cdot \overline{\overline{B} \cdot C}}}$$

NAND

$F = \sum(3,5,6), \quad A.O. = 1$

$A \cdot B \cdot \bar{C}$

AB / C	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	X	1	0	1

$\bar{B} \cdot C$

$\bar{A} \cdot C$

$$F = (A \cdot B \cdot \bar{C}) + \bar{A} \cdot C + \bar{B} \cdot C = \overline{\overline{(A \cdot B \cdot \bar{C}) + \bar{A} \cdot C + \bar{B} \cdot C}} =$$

$$\boxed{= \overline{\overline{A \cdot B \cdot \bar{C}} \cdot \overline{\bar{A} \cdot C} \cdot \overline{\bar{B} \cdot C}}} = \overline{(\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{C}) \cdot (B + \bar{C})} =$$

NAND

$$= \overline{(\bar{A} + \bar{B} + C)} + \overline{(A + \bar{C})} + \overline{(B + \bar{C})} = \boxed{\overline{\overline{\overline{(\bar{A} + \bar{B} + C)} + \overline{(A + \bar{C})} + \overline{(B + \bar{C})}}}}$$

NOR

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.20

Δίνεται η συνάρτηση $f = \Sigma(6,7,8,9,10,11,12,13)$ ***με αδιάφορους όρους τους*** **Α.Ο=(1,4,14,15)** ***και ζητείται να παρθεί η λογική συνάρτηση στην ελάχιστη μορφή της*** f_{min} ***χρησιμοποιώντας τον πίνακα Karnaugh.***

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	X	1	1
01	X	0	1	1
11	0	1	X	1
10	0	1	X	1

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	X	1	1
01	X	0	1	1
11	0	1	X	1
10	0	1	X	1

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	X	1	1
01	X	0	1	1
11	0	1	X	1
10	0	1	X	1

A

$B \cdot C$

$$f_{min} = A + B \cdot C$$

Σχεδίαση Συνδυαστικών Κυκλωμάτων

Σχεδίαση Συνδυαστικών Κυκλωμάτων

Η διαδικασία σχεδίασης περιλαμβάνει τα παρακάτω 5 βήματα:

Βήμα 1ο. Την κατανόηση, ανάλυση και μορφοποίηση του προβλήματος:

Αυτό περιλαμβάνει:

Α. Την κατά το δυνατό καλύτερη κατανόηση του υπό επίλυση προβλήματος.

Β. Την πιστοποίηση του αν πρόκειται η λύση στο πρόβλημα να είναι συνδυαστικής και όχι ακολουθιακής λογικής.

Σχεδίαση Συνδυαστικών Κυκλωμάτων

Γ. Τον καθορισμό των μεταβλητών εισόδου και εξόδου.

Δ. Τον εντοπισμό των τυχόν αδιάφορων καταστάσεων που υπάρχουν (αν υπάρχουν).

Ε. Τη σύνταξη του πίνακα αληθείας.

Ζ. Τη λήψη των συναρτήσεων Boole.

Βήμα 2ο. Την ελαχιστοποίηση των λογικών συναρτήσεων.

Βήμα 3ο. Τη σύνθεση του κυκλώματος από τις ελάχιστες συναρτήσεις.

Βήμα 4ο. Την τεκμηρίωση.

Παράδειγμα 4.7

Να σχεδιαστεί ένα λογικό κύκλωμα που θα ελέγχει τη λειτουργία ενός φωτεινού τροχαίου σηματοδότη, που φαίνεται στο σχήμα.

Αν το κύκλωμα ελέγχου των λαμπτήρων του φωτεινού σηματοδότη δεν λειτουργήσει σωστά είναι πιθανόν να παρουσιάζεται λάθος συνδυασμός των λαμπτήρων.

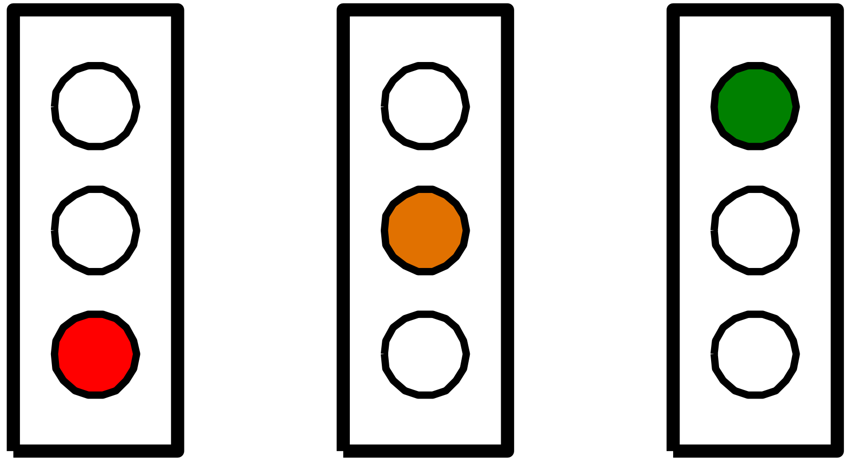
Το κύκλωμα που θα σχεδιαστεί πρέπει να μπορεί να ανιχνεύει οποιουσδήποτε λάθος συνδυασμούς και να παράγει ένα σήμα συναγερμού που θα σημάνει στο γραφείο συντήρησης φωτεινών σηματοδοτών της πόλης. Οι επιτρεπτοί συνδυασμοί του σηματοδότη φαίνονται σε επόμενο σχήμα.

Παράδειγμα 4.7

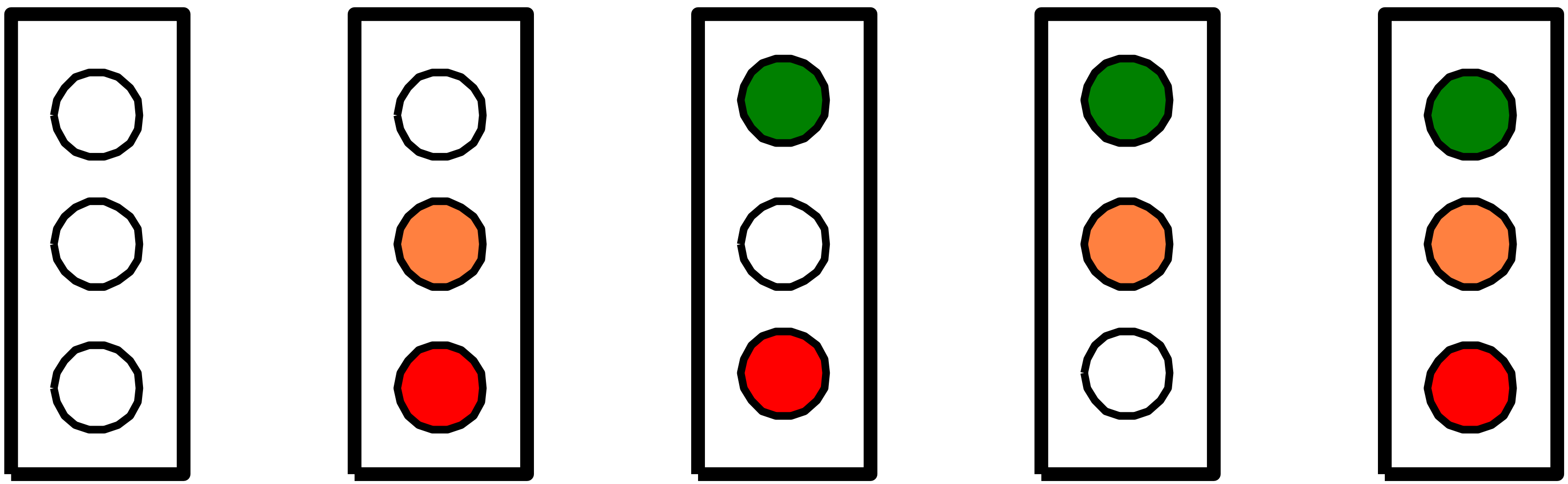
A=Πράσινο

B=Πορτοκαλί

C=Κόκκινο



Στο σχήμα φαίνονται οι απαγορευμένοι συνδυασμοί



Διαδικασία σχεδίασης:

Καθορίζονται οι μεταβλητές εισόδου A, B, C εξόδου F και συντάσσεται ο πίνακας αληθείας του προβλήματος.

Πίνακας αληθείας

	Είσοδοι			**Έξοδος**
Δεκαδικός	**A**	**B**	**C**	**F**
0	0	0	0	Και οι τρεις λαμπτήρες σβηστοί. Λάθος. (1)
1	0	0	1	Μόνο ο κόκκινος αναμμένος. Σωστό. (0)
2	0	1	0	Μόνο ο πορτοκαλί αναμμένος. Σωστό. (0)
3	0	1	1	Δύο ταυτόχρονα αναμμένοι. Λάθος. (1)
4	1	0	0	Μόνο ο πράσινος αναμμένος. Σωστό. (0)
5	1	0	1	Δύο ταυτόχρονα αναμμένοι. Λάθος. (1)
6	1	1	0	Δύο ταυτόχρονα αναμμένοι. Λάθος. (1)
7	1	1	1	Όλοι ταυτόχρονα αναμμένοι. Λάθος. (1)

Πίνακας αληθείας

	Είσοδοι			**Έξοδος**
Δεκαδικός	**A**	**B**	**C**	**F**
0	0	0	0	Και οι τρεις λαμπτήρες σβηστοί. Λάθος. (1)
1	0	0	1	Μόνο ο κόκκινος αναμμένος. Σωστό. (0)
2	0	1	0	Μόνο ο πορτοκαλί αναμμένος. Σωστό. (0)
3	0	1	1	Δύο ταυτόχρονα αναμμένοι. Λάθος. (1)
4	1	0	0	Μόνο ο πράσινος αναμμένος. Σωστό. (0)
5	1	0	1	Δύο ταυτόχρονα αναμμένοι. Λάθος. (1)
6	1	1	0	Δύο ταυτόχρονα αναμμένοι. Λάθος. (1)
7	1	1	1	Όλοι ταυτόχρονα αναμμένοι. Λάθος. (1)

Από τον πίνακα αληθείας φαίνεται ότι η έξοδος θα πάει σε λογικό 1 όταν συμβαίνει ο συνδυασμός 0 ή ο συνδυασμός 3 ή ο συνδυασμός 5 ή ο συνδυασμός 6 ή ο συνδυασμός 7.

Αυτό στη λογική της άλγεβρας Boole μεταφράζεται στη συνάρτηση αθροίσματος ελαχίστων όρων:

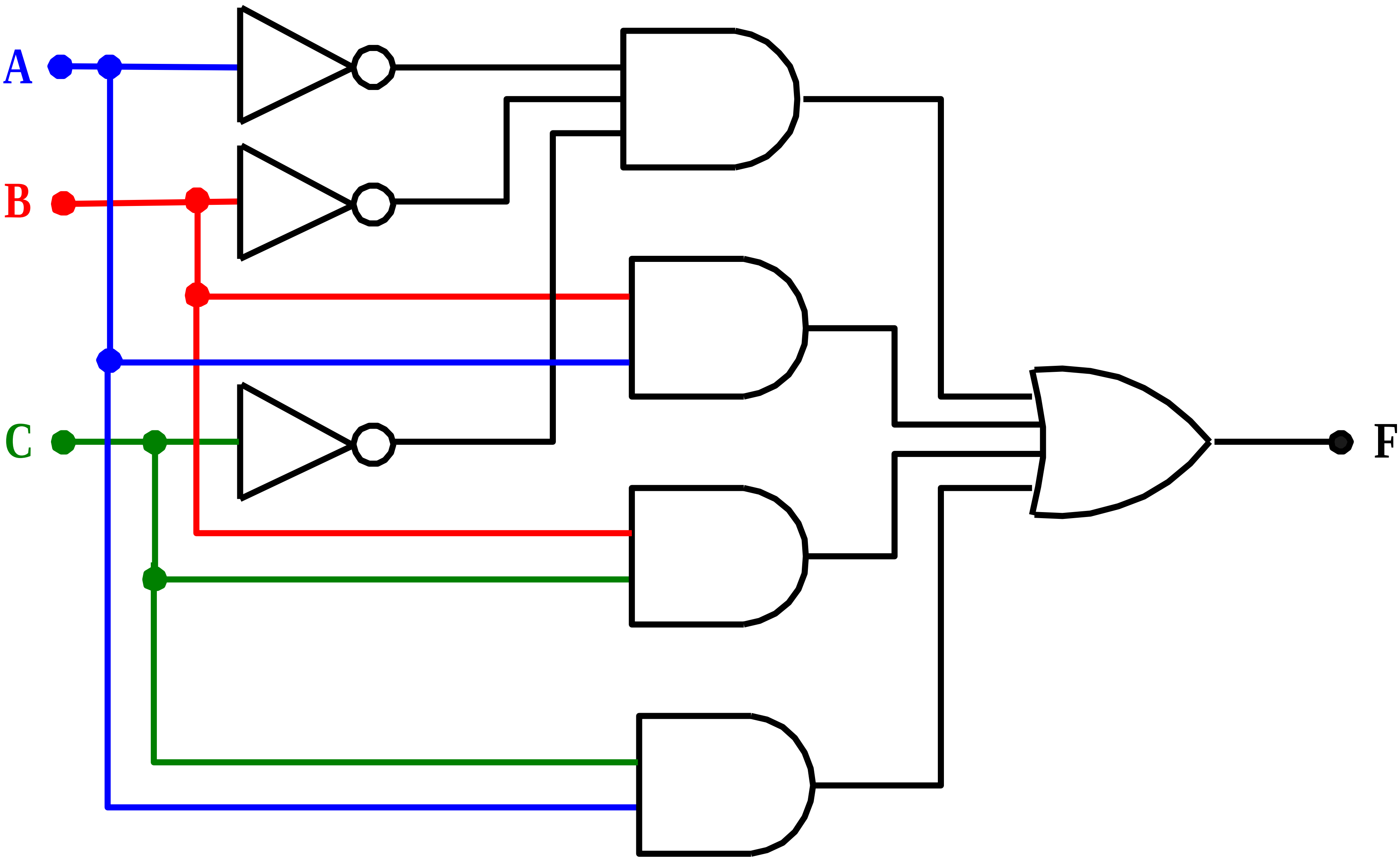
$$F = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C = \Sigma(0,3,5,6,7)$$

$$F = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C = \Sigma(0,3,5,6,7)$$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1

$$F_{min} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot B + B\cdot C + A\cdot C$$

$$F_{min} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C$$



Παράδειγμα 4.8

Να σχεδιαστεί ένα ψηφιακό σύστημα ελέγχου που θα ελέγχει τέσσερις κινητήρες σε μια γραμμή επεξεργασίας ξύλου.

Ο πρώτος κινητήρας (M_1) ελέγχει τη λίπανση της ταινίας.

Ο δεύτερος κινητήρας (M_2) κινεί την ταινία μεταφοράς.

Ο τρίτος κινητήρας (M_3) ελέγχει το οριζόντιο πριόνι.

Ο τέταρτος κινητήρας (M_4) ελέγχει το κατακόρυφο.

Οι παραπάνω κινητήρες ελέγχονται από τους διακόπτες Δ_1, Δ_2, Δ_3 και Δ_4 αντίστοιχα.

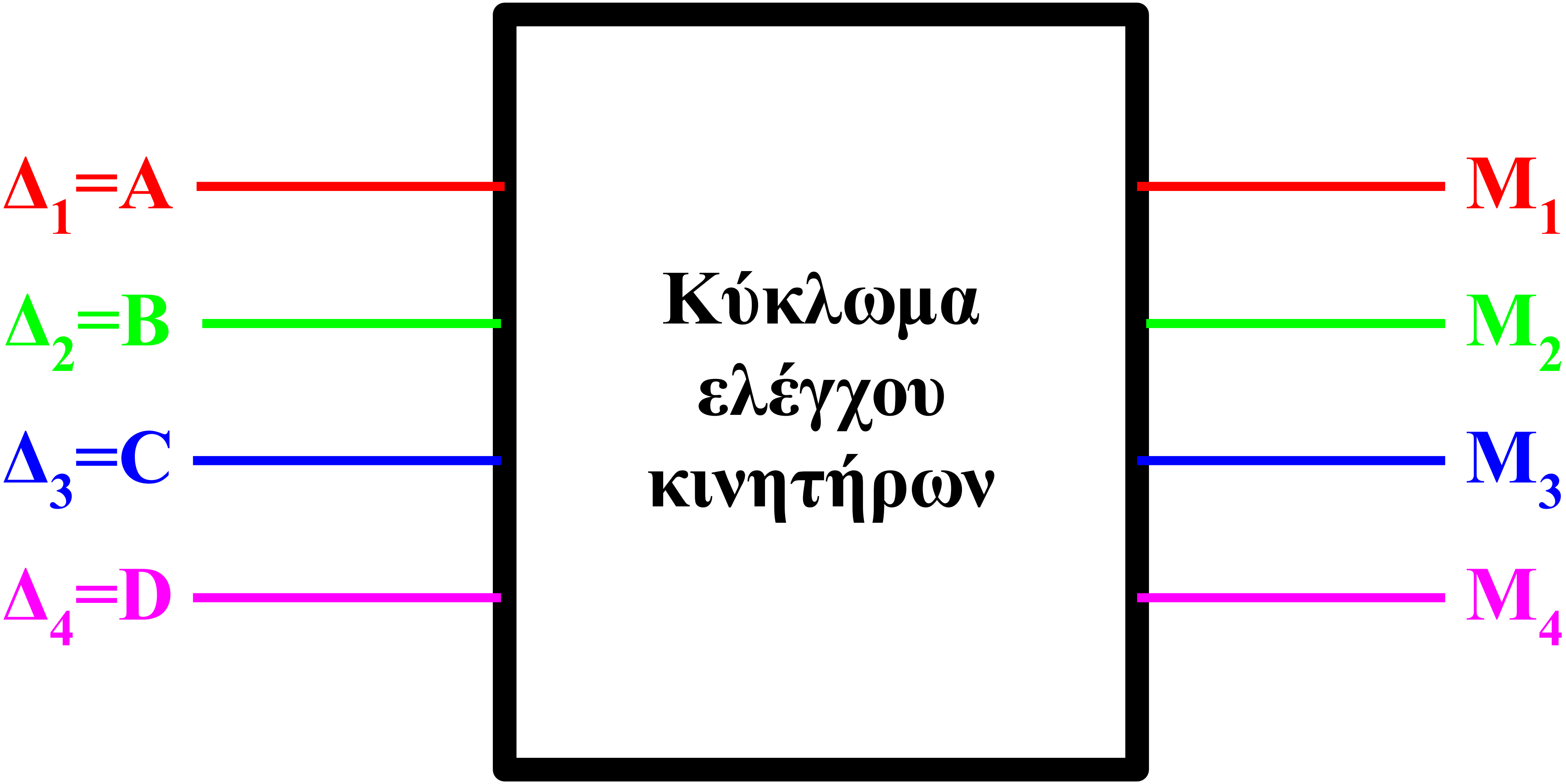
Παράδειγμα 4.8

Οι συνθήκες και οι περιορισμοί στη λειτουργία των κινητήρων είναι οι παρακάτω:

1. Η λίπανση της ταινίας πρέπει να γίνεται συνέχεια για όσο λειτουργεί η ταινία.

2. Σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να λειτουργούν ταυτόχρονα και τα δύο πριόνια.

3. Η ταινία μεταφοράς πρέπει πάντα να είναι σταματημένη όταν λειτουργεί το κατακόρυφο πριόνι.


Δ1=A
Δ2=B
Δ3=C
Δ4=D
Κύκλωμα ελέγχου κινητήρων
M1
M2
M3
M4

	Είσοδοι				Έξοδοι				Σχόλια
Δεκ.	**A**	**B**	**C**	**D**	M_1	M_2	M_3	M_4	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	Σύστημα κλειστό
1	0	0	0	1	0	0	0	1	OK
2	0	0	1	0	0	0	1	0	OK
3	0	0	1	1	0	0	0	0	Δύο πριόνια μαζί.
4	0	1	0	0	0	0	0	0	Ταινία χωρίς λίπανση
5	0	1	0	1	0	0	0	0	Ταινία και κατακόρυφο πριόνι μαζί.
6	0	1	1	0	0	0	0	0	Ταινία χωρίς λίπανση
7	0	1	1	1	0	0	0	0	Δύο πριόνια και ταινία μαζί.
8	1	0	0	0	1	0	0	0	OK
9	1	0	0	1	1	0	0	1	OK
10	1	0	1	0	1	0	1	0	OK
11	1	0	1	1	0	0	0	0	Δύο πριόνια μαζί.
12	1	1	0	0	1	1	0	0	OK
13	1	1	0	1	0	0	0	0	Ταινία και κατακόρυφο πριόνι μαζί.
14	1	1	1	0	1	1	1	0	OK
15	1	1	1	1	0	0	0	0	Όλα μαζί ενεργά

$f_{M1}=\Sigma(8, 9, 10, 12, 14)$, $f_{M2}=\Sigma(12, 14)$, $f_{M3}=\Sigma(2, 10, 14)$, $f_{M4}=\Sigma(1, 9)$

$f_{M1}=\Sigma(8, 9, 10, 12, 14)$, $f_{M2}=\Sigma(12, 14)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	1

$$f_{M1} = A \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	1	0

$$f_{M2} = A \cdot B \cdot \overline{D}$$

$f_{M3}=\Sigma(2, 10, 14)$, $f_{M4}=\Sigma(1, 9)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	1	1

$$f_{M3} = A \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

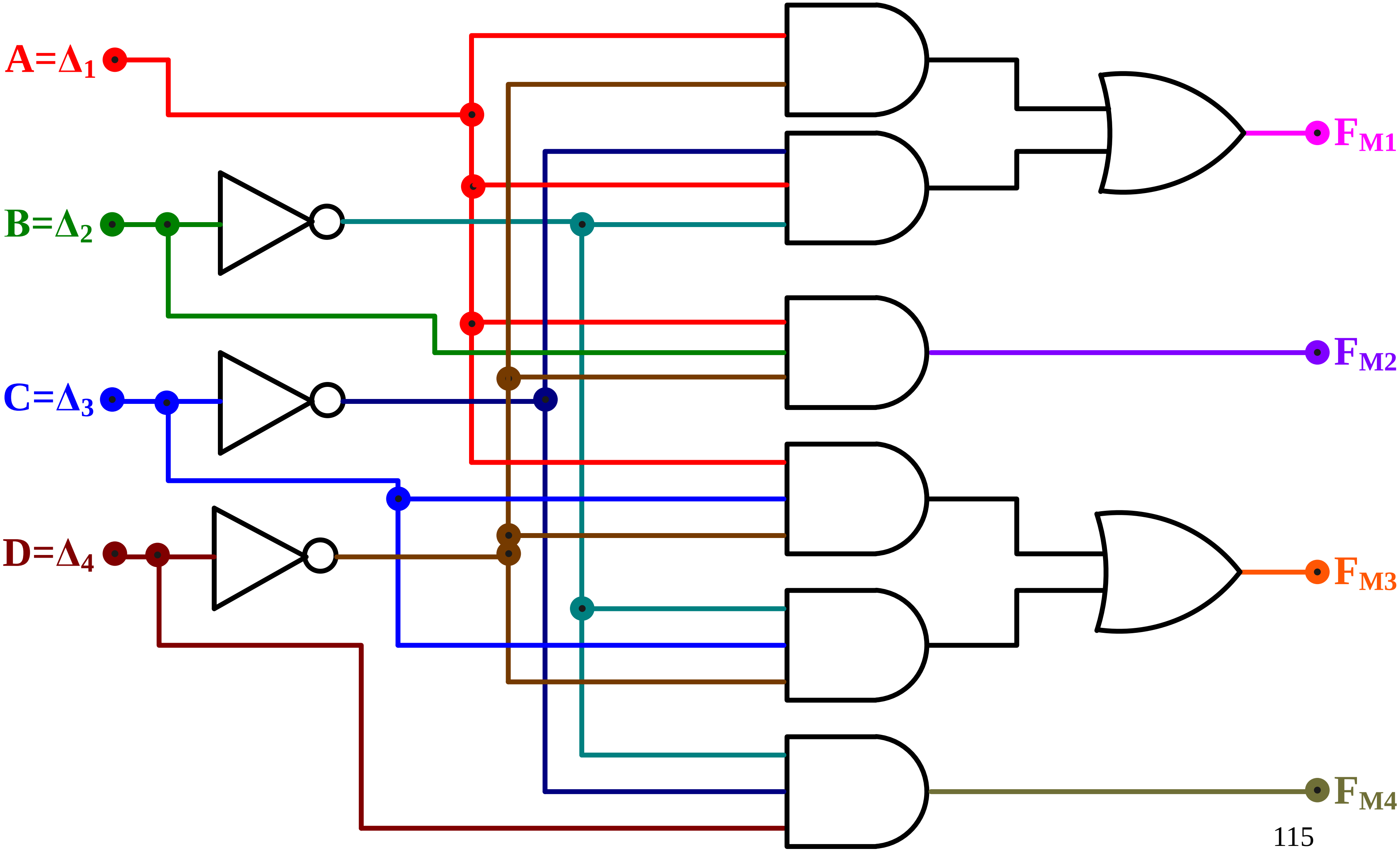
$$f_{M4} = \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$$

$$f_{M1} = A \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

$$f_{M2} = A \cdot B \cdot \overline{D}$$

$$f_{M3} = A \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$$

$$f_{M4} = \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$$



Παράδειγμα 4.9

Να σχεδιαστεί ένα λογικό συνδυαστικό κύκλωμα που να μετατρέπει τον κώδικα 8421_{BCD} σε κώδικα GRAY.

Παράδειγμα 4.9

	Είσοδοι				Έξοδοι			
Δεκαδικός	**A**	**B**	**C**	**D**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1

$W=\Sigma(8,9)$

$X = \Sigma(4,5,6,7,8,9)$

$Y = \Sigma(2,3,4,5)$

$Z = \Sigma(1,2,5,6,9)$

$$W=\Sigma(8,9)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	1
01	0	0	X	1
11	0	0	X	X
10	0	0	X	X

$$W = A$$

$$X = \Sigma(4,5,6,7,8,9)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	X	1
01	0	1	X	1
11	0	1	X	X
10	0	1	X	X

$$X = A + B$$

$$Y = \Sigma(2,3,4,5)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	X	0
01	0	1	X	0
11	1	0	X	X
10	1	0	X	X

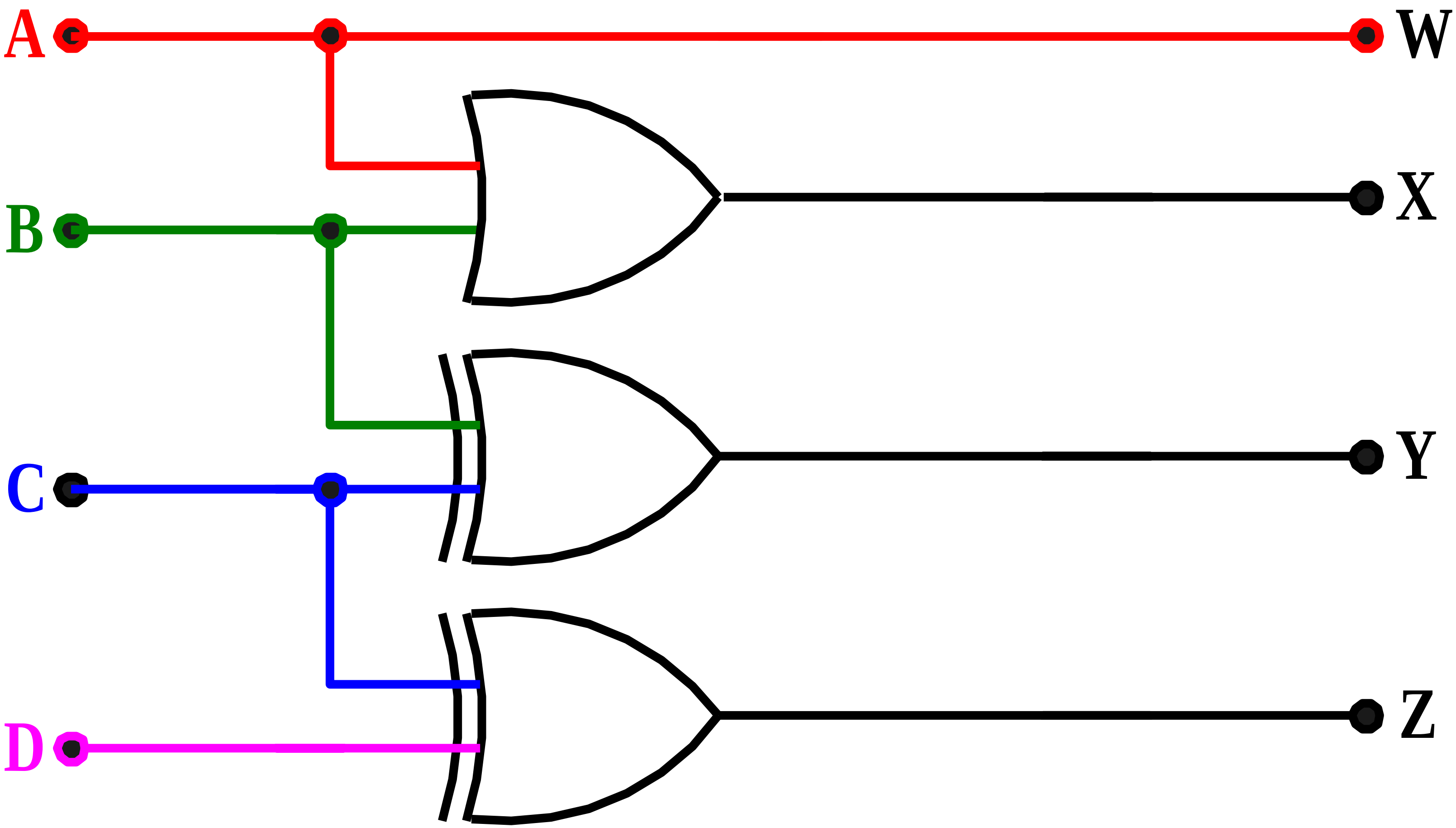
$$Y = B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C = (B \oplus C)$$

$$Z = \Sigma(1,2,5,6,9)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	1	1	X	1
11	0	0	X	X
10	1	1	X	X

$$Z = \overline{C} \cdot D + C \cdot \overline{D} = (C \oplus D)$$

$$W = A$$
$$X = A + B$$
$$Y = B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C = (B \oplus C)$$
$$Z = \overline{C} \cdot D + C \cdot \overline{D} = (C \oplus D)$$



Παράδειγμα 4.10

Να σχεδιαστεί ένα κύκλωμα που θα μετατρέπει τον κώδικα 5211 που εφαρμόζεται στην είσοδό του σε κώδικα 2421.

	Είσοδοι				Έξοδοι			
Δεκαδικός	**A**	**B**	**C**	**D**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	1	1
4	0	1	1	1	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0	1	1
6	1	0	0	1	1	1	0	0
7	1	0	1	1	1	1	0	1
8	1	1	1	0	1	1	1	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1

	Είσοδοι				Έξοδοι			
Δεκαδικός	**A**	**B**	**C**	**D**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	1	1
4	0	1	1	1	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0	1	1
6	1	0	0	1	1	1	0	0
7	1	0	1	1	1	1	0	1
8	1	1	1	0	1	1	1	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1

$W = \Sigma(5,6,7,8,9)$ $X = \Sigma(4,6,7,8,9)$

$Y = \Sigma(2,3,5,8,9)$ $Z = \Sigma(1,3,5,7,9)$

Με βάση τον κώδικα εισόδου 5211κατασκευάζεται ο βοηθητικός πίνακας Karnaught

	Είσοδοι			
Δεκαδικός	**A**	**B**	**C**	**D**
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	0	1
7	1	0	1	1
8	1	1	1	0
9	1	1	1	1

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	2	X	5
01	1	X	X	6
11	X	4	9	7
10	X	3	8	X

$$W = \Sigma(5,6,7,8,9)$$

$$X = \Sigma(4,6,7,8,9)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	2	X	5
01	1	X	X	6
11	X	4	9	7
10	X	3	8	X

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	1
01	0	X	X	1
11	X	0	1	1
10	X	0	1	X

$$W = A$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	0	X	X	1
11	X	1	1	1
10	X	0	1	X

$$X = A \cdot D + A \cdot C + \left\{ \begin{matrix} B \cdot D \\ C \cdot D \end{matrix} \right.$$

$$Y = \Sigma(2,3,5,8,9)$$

$$Z = \Sigma(1,3,5,7,9)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	2	X	5
01	1	X	X	6
11	X	4	9	7
10	X	3	8	X

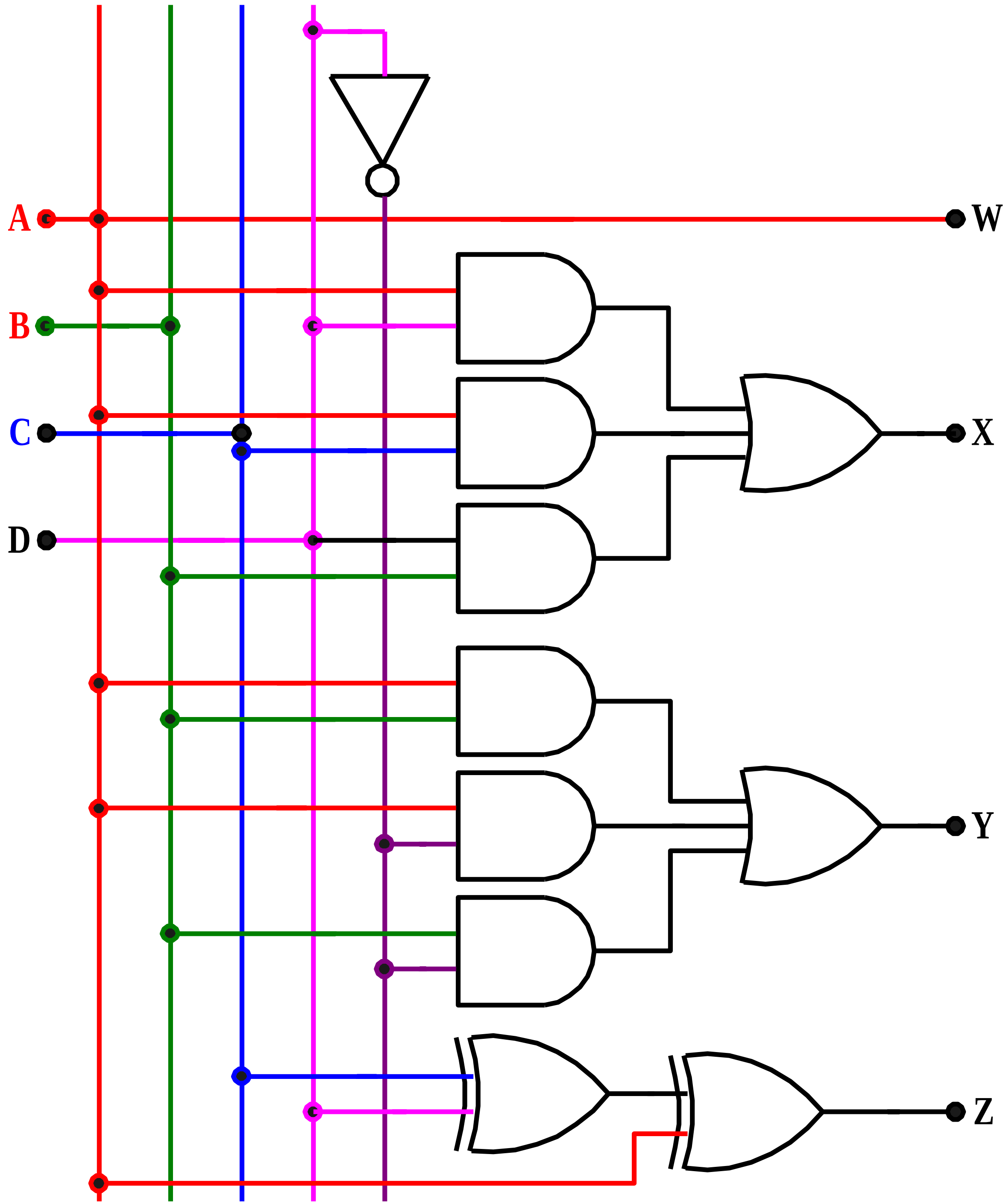
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	X	1
01	0	X	X	0
11	X	0	1	0
10	X	1	1	X

$$Y = A \cdot B + A \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	1
01	1	X	X	0
11	X	0	1	1
10	X	1	0	X

$$Z = A \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot C \cdot D$$

$$= A \cdot (\overline{C \oplus D}) + \overline{A} \cdot (C \oplus D) = A \oplus (C \oplus D)$$


A
B
C
D
W
X
Y
Z

Ειδικό θέμα: Ελαχιστοποίηση Συναρτήσεων με τη Μέθοδο Quine-Mc Cluskey

Είναι μια μέθοδος, που αποτελεί έναν αλγόριθμο για απλοποίηση λογικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών με τη βοήθεια υπολογιστή, και στηρίζεται στο θεώρημα της άλγεβρας Boole $AB + A\overline{B} = A$

Τα βήματα που ακολουθούνται στη διαδικασία αυτή είναι:

- **Μετατρέπεται η συνάρτηση σε άθροισμα ελαχίστων όρων.**
- **Συγκρίνεται κάθε ελάχιστος όρος με όλους τους υπόλοιπους, ξεκινώντας από τον πρώτο όρο, και με την εφαρμογή της ιδιότητας** $AB + A\overline{B} = A$ **της άλγεβρας Boole απομακρύνεται η μεταβλητή που είναι συμπληρωματική στους υπό σύγκριση όρους και**

- **Δημιουργείται μία νέα στήλη, που αποτελείται από τους απλοποιημένους όρους που προήλθαν από την σύγκριση.**
- **Κάθε φορά που κάποιος όρος παίρνει μέρος στη απλοποίηση τσεκάρεται, αν δεν είναι ήδη τσεκαρισμένος από προηγούμενη σύγκριση.**
- **Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται και για την νέα στήλη μέχρι να βρεθεί μία στήλη στην οποία δεν μπορεί να γίνει καμία περαιτέρω απλοποίηση.**
- **Οι όροι της τελευταίας αυτής στήλης και οι όροι που δεν έχουν τσεκαριστεί ονομάζονται "πρώτοι συνεπάγοντες" (prime implicants).**

- **Κατασκευάζεται ένας πίνακας ο οποίος έχει τόσες γραμμές όσοι οι πρώτοι συνεπάγοντες όροι και τόσες στήλες όσοι οι αρχικοί ελάχιστοι όροι.**

- **Τοποθετούνται οι ελάχιστοι όροι στις στήλες του πίνακα και οι πρώτοι συνεπάγοντες στις γραμμές του πίνακα.**

- **Τσεκάρονται τα τετραγωνάκια που δείχνουν σε ποιους ελάχιστους όρους περιέχεται ο κάθε πρώτος συνεπάγων. Οι όροι που στις κάθετες στήλες έχουν ένα μόνο τσεκάρισμα ονομάζονται ¨ουσιώδεις όροι¨ (essential terms).**

Οι ουσιώδεις όροι είναι μέρος της ελάχιστης συνάρτησης.

Ελέγχεται αν οι ουσιώδεις όροι καλύπτουν (με τον όρο καλύπτουν εννοείται ότι εμπεριέχονται σ' αυτούς) όλους τους ελάχιστους όρους.

Διαφορετικά επιλέγεται το ελάχιστο σύνολο από τους πρώτους συνεπάγοντες, που να καλύπτουν όλους τους ελάχιστους όρους της συνάρτησης, και

οι όροι αυτοί μαζί και με τους ουσιώδεις όρους αποτελούν την ελάχιστη συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.21

Να απλοποιηθεί με την μέθοδο Quine-McCluskey η λογική συνάρτηση

$$f = A\cdot D + C\cdot D + B\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot B\cdot C$$

Μετατρέπεται σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων:

$$f = A\cdot D + C\cdot D + B\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot B\cdot C$$
$$= AD\cdot(B+\overline{B})\cdot(C+\overline{C}) + C\cdot D\cdot(A+\overline{A})\cdot(B+\overline{B})$$
$$+ B\cdot D\cdot(A+\overline{A})\cdot(C+\overline{C}) + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot(D+\overline{D}) + A\cdot B\cdot C\cdot(D+\overline{D})$$
$$= (A\cdot B\cdot D + A\cdot\overline{B}\cdot D)\cdot(C+\overline{C}) + (A\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot C\cdot D)\cdot(B+\overline{B}) +$$
$$+ (A\cdot B\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot D)\cdot(C+\overline{C}) + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$$
$$= A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot D$$
$$+ A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$$
$$+ \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$$
$$= A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D +$$
$$+ \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$$

$$f = A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D + A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}\cdot D +$$
$$+ \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot \overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}$$

1.	$A\cdot B\cdot C\cdot D$ √	(1,2)	$A\cdot B\cdot D$ √	(1,2),(3,4)	$A\cdot D$
2.	$A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$ √	(1,3)	$A\cdot C\cdot D$ √	(1,2),(5,9)	$B\cdot D$
3.	$A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D$ √	(1,5)	$B\cdot C\cdot D$ √	(1,3),(2,4)	$A\cdot D$
4.	$A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}\cdot D$ √	(1,8)	$A\cdot B\cdot C$	(1,3),(5,6)	$C\cdot D$
5.	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$ √	(2,4)	$A\cdot \overline{C}\cdot D$ √	(1,5),(2,9)	$B\cdot D$
6.	$\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D$ √	(2,9)	$B\cdot \overline{C}\cdot D$ √	(1,5),(3,6)	$C\cdot D$
7.	$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot \overline{D}$ √	(3,4)	$A\cdot \overline{B}\cdot D$ √		
8.	$A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}$ √	(3,6)	$\overline{B}\cdot C\cdot D$ √		
9.	$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$ √	(5,6)	$\overline{A}\cdot C\cdot D$ √		
		(5,9)	$\overline{A}\cdot B\cdot D$ √		
		(7,9)	$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}$		

$$f = A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D + A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}\cdot D +$$

$$+\, \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot \overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}$$

1.	$A\cdot B\cdot C\cdot D$	√	(1,2)	$A\cdot B\cdot D$	√	(1,2),(3,4)	$A\cdot D$
2.	$A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$	√	(1,3)	$A\cdot C\cdot D$	√	(1,5),(2,9)	$B\cdot D$
3.	$A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D$	√	(1,5)	$B\cdot C\cdot D$	√	(1,5),(3,6)	$C\cdot D$
4.	$A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}\cdot D$	√	(1,8)	$A\cdot B\cdot C$			
5.	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$	√	(2,4)	$A\cdot \overline{C}\cdot D$	√		
6.	$\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D$	√	(2,9)	$B\cdot \overline{C}\cdot D$	√		
7.	$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot \overline{D}$	√	(3,4)	$A\cdot \overline{B}\cdot D$	√		
8.	$A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}$	√	(3,6)	$\overline{B}\cdot C\cdot D$	√		
9.	$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$	√	(5,6)	$\overline{A}\cdot C\cdot D$	√		
			(5,9)	$\overline{A}\cdot B\cdot D$	√		
			(7,9)	$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}$			

	$A\cdot B\cdot C\cdot D$	$A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$	$A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D$	$A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$	$\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot \overline{D}$	$A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$
	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$A\cdot D$	√	√	√	√					
$B\cdot D$	√	√			√				√
$C\cdot D$	√		√		√	√			
$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}$							√		√
$A\cdot B\cdot C$	√							√	
				*		*	*	*	

$$f_{min} = A\cdot D + C\cdot D + A\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.22

Να απλοποιηθεί με την μέθοδο Quine-McCluskey η λογική συνάρτηση: $f = \Sigma(1,2,4,5,6,9,10,12,13,14)$

1.	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(1,4)	$\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(1,4), (6,9)	$\overline{C}\cdot D$
2.	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$	√	(1,6)	$\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(1,6), (4,9)	$\overline{C}\cdot D$
3.	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	√	(2,5)	$\overline{A}\cdot C\cdot\overline{D}$	√	(2,5), (7,10)	$C\cdot\overline{D}$
4.	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(2,7)	$\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$	√	(2,7), (5,10)	$C\cdot\overline{D}$
5.	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	√	(3,4)	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$	√	(3,4), (8,9)	$B\cdot\overline{C}$
6.	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(3,5)	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{D}$	√	(3,5), (8,10)	$B\cdot\overline{D}$
7.	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$	√	(3,8)	$B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	√	(3,8), (4,9)	$B\cdot\overline{C}$
8.	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	√	(4,9)	$B\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(3,8), (5,10)	$B\cdot\overline{D}$
9.	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(5,10)	$B\cdot C\cdot\overline{D}$	√		
10.	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	√	(6,9)	$A\cdot\overline{C}\cdot D$	√		
			(7,10)	$A\cdot C\cdot\overline{D}$	√		
			(8,9)	$A\cdot B\cdot\overline{C}$	√		
			(8,10)	$A\cdot B\cdot\overline{D}$	√		

Πίνακας

	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$\overline{C}\cdot D$	√			√		√			√	
$C\cdot\overline{D}$		√			√		√			√
$B\cdot\overline{C}$			√	√				√	√	
$B\cdot\overline{D}$			√		√			√		√
	*	*				*	*			

$$f_{min} = \overline{C}\cdot D + C\cdot\overline{D};$$

$$f_{min} = \overline{C}\cdot D + C\cdot\overline{D} + B\cdot\overline{C}$$

$$f_{min} = \overline{C}\cdot D + C\cdot\overline{D} + B\cdot\overline{D}$$

Παράδειγμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.23

Να απλοποιηθεί με την μέθοδο Quine-McCluskey η λογική συνάρτηση $f = \Sigma(1,3,9,11,12,13,14,15)$

1.	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(1,2)	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot D$	√	(1,2) (3,4)	$\overline{B}\cdot D$
2.	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	√	(1,3)	$\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(1,3) (2,4)	$\overline{B}\cdot D$
3.	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(2,4)	$\overline{B}\cdot C\cdot D$	√	(3,4) (6,8)	$A\cdot D$
4.	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	√	(3,4)	$A\cdot\overline{B}\cdot D$	√	(3,6) (4,8)	$A\cdot D$
5.	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	√	(3,6)	$A\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(5,6) (7,8)	$A\cdot B$
6.	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	√	(4,8)	$A\cdot C\cdot D$	√	(5,7) (6,8)	$A\cdot B$
7.	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	√	(5,6)	$A\cdot B\cdot\overline{C}$	√		
8.	$A\cdot B\cdot C\cdot D$	√	(5,7)	$A\cdot B\cdot\overline{D}$	√		
			(6,8)	$A\cdot B\cdot D$	√		
			(7,8)	$A\cdot B\cdot C$	√		

Πίνακας

	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	$A\cdot B\cdot C\cdot D$
	X	X	X	X	X	X	X	X
$\overline{B}\cdot D$	√	√	√	√				
$A\cdot D$			√	√		√		√
$A\cdot B$					√	√	√	√
	*	*			*		*	

$$f_{min} = A\cdot B + \overline{B}\cdot D;$$

Παράδειγμα

$$f_{min} = A\cdot B + \overline{B}\cdot D$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.24

Να απλοποιηθεί με την μέθοδο Quine-McCluskey η λογική συνάρτηση: $f = \Sigma(1,3,4,5,6,7,10,11,14)$

1.	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	√
2.	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	√
3.	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	√
4.	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	√
5.	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	√
6.	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$	√
7.	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$	√
8.	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	√
9.	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	√

(1,2)	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot D$	√
(1,4)	$\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D$	√
(2,6)	$\overline{A}\cdot C\cdot D$	√
(2,8)	$\overline{B}\cdot C\cdot D$	
(3,4)	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$	√
(3,5)	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{D}$	√
(4,6)	$\overline{A}\cdot B\cdot D$	√
(5,6)	$\overline{A}\cdot B\cdot C$	√
(5,9)	$B\cdot C\cdot\overline{D}$	
(7,8)	$A\cdot\overline{B}\cdot C$	
(7,9)	$A\cdot C\cdot\overline{D}$	

(1,2), (4,6)	$\overline{A}\cdot D$
(1,4), (2,6)	$\overline{A}\cdot D$
(3,4), (5,6)	$\overline{A}\cdot B$
(3,5), (4,6)	$\overline{A}\cdot B$

Πίνακας

	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$
	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$\overline{A}\cdot D$	√	√		√		√			
$\overline{A}\cdot B$			√	√	√	√			
$\overline{B}\cdot C\cdot D$		√						√	
$B\cdot C\cdot\overline{D}$					√				√
$A\cdot\overline{B}\cdot C$							√	√	
$A\cdot C\cdot\overline{D}$							√		√
	*		*						

$$f_{min} = \overline{A}\cdot D + \overline{A}\cdot B;$$

$$f_{min} = \overline{A}\cdot D + \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}\cdot C + B\cdot C\cdot\overline{D}$$

$$f_{min} = \overline{A}\cdot D + \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot C\cdot\overline{D}$$

Παράδειγμα

	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$
	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$\overline{A}\cdot D$	√	√		√		√			
$\overline{A}\cdot B$			√	√	√	√			
$\overline{B}\cdot C\cdot D$		√						√	
$B\cdot C\cdot\overline{D}$					√				√
$A\cdot\overline{B}\cdot C$							√	√	
$A\cdot C\cdot\overline{D}$							√		√
	*		*						

$$f_{min}=\overline{A}\cdot D+\overline{A}\cdot B;$$

$$f_{min}=\overline{A}\cdot D+\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}\cdot C+B\cdot C\cdot\overline{D}$$

$$f_{min}=\overline{A}\cdot D+\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot C\cdot\overline{D}$$

$$f_{min}=\overline{A}\cdot D+\overline{A}\cdot B+A\cdot C\cdot\overline{D}+\overline{B}\cdot C\cdot D$$

$$f_{min}=\overline{A}\cdot D+\overline{A}\cdot B+A\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot C$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.25

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $f = \Sigma(3,4,6,7,8,9)$ *με αδιάφορους όρους τους:* $\Sigma(10,11,12,13,14,15)$

Σημείωση: **Στην περίπτωση αυτή οι αδιάφοροι όροι μπαίνουν στη λίστα και χρησιμοποιούνται στο ζευγάρωμα αλλά δεν χρειάζεται να καλυφθούν και επομένως, δεν μπαίνουν στον πίνακα.**

$f = \Sigma(3,4,6,7,8,9)\ \ \Sigma(10,11,12,13,14,15)$

1. $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$ √
2. $\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$ √
3. $\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$ √
4. $\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$ √
5. $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$ √
6. $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$ √
7. $A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$ √
8. $A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$ √
9. $A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$ √
10. $A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$ √
11. $A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$ √
12. $A\cdot B\cdot C\cdot D$ √

(1,4) $\overline{A}\cdot C\cdot D$ √
(1,8) $\overline{B}\cdot C\cdot D$ √
(2,3) $\overline{A}\cdot B\cdot\overline{D}$ √
(2,9) $B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$ √
(3,4) $\overline{A}\cdot B\cdot C$ √
(3,11) $B\cdot C\cdot\overline{D}$ √
(4,12) $B\cdot C\cdot D$ √
(5,6) $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ √
(5,7) $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}$ √
(5,9) $A\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$ √
(6,8) $A\cdot\overline{B}\cdot D$ √
(6,10) $A\cdot\overline{C}\cdot D$ √
(7,8) $A\cdot\overline{B}\cdot C$ √
(7,11) $A\cdot C\cdot\overline{D}$ √
(8,12) $A\cdot C\cdot D$ √
(9,10) $A\cdot B\cdot\overline{C}$ √
(9,11) $A\cdot B\cdot\overline{D}$ √
(10,12) $A\cdot B\cdot D$ √
(11,12) $A\cdot B\cdot C$ √

(1,4),(8,12) $C\cdot D$
(1,8),(4,12) $C\cdot D$
(2,3),(9,11) $B\cdot\overline{D}$
(2,9),(3,11) $B\cdot\overline{D}$
(3,4),(11,12) $B\cdot C$
(3,11),(4,12) $B\cdot C$
(5,6),(7,8) $A\cdot\overline{B}$ √
(5,6)(9,10) $A\cdot\overline{C}$ √
(5,7),(6,8) $A\cdot\overline{B}$ √
(5,7),(9,11) $A\cdot\overline{D}$ √
(5,9),(6,10) $A\cdot\overline{C}$ √
(5,9),(7,11) $A\cdot\overline{D}$ √
(6,8),(10,12) $A\cdot D$ √
(6,10),(8,12) $A\cdot D$ √
(7,8),(11,12) $A\cdot C$ √
(7,11),(8,12) $A\cdot C$ √
(9,10),(11,12) $A\cdot B$ √
(9,11),(10,12) $A\cdot B$ √

(5,6),(7,8),(9,10),(11,12)A
(5,6),(9,10),(7,8),(11,12)A
(5,7),(9,11),(6,8),(10,12)A

Πίνακας

$f = \Sigma(3,4,6,7,8,9)$

	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$
	X	X	X	X	X	X
A					√	√
$B\cdot C$			√	√		
$B\cdot\overline{D}$		√	√			
$C\cdot D$	√			√		
	*	*			*	*

$$f_{min} = A + B\cdot\overline{D} + C\cdot D;$$

Παράδειγμα

$f = \Sigma(3,4,6,7,8,9)$

	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$ X	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$ X	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$ X	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$ X	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$ X	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$ X
A					√	√
$B\cdot C$			√	√		
$B\cdot\overline{D}$		√	√			
$C\cdot D$	√			√		
	*	*			*	*

$$f_{min} = A + B\cdot\overline{D} + C\cdot D$$