Αξιώματα της Άλγεβρας Boole

#	Αξίωμα	Δυϊκό	Ονομασία
A1	$B = 0$ if $B \neq 1$	$B = 1$ if $B \neq 0$	Δυαδικό πεδίο
A2	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$	NOT
A3	$0 \bullet 0 = 0$	$1 + 1 = 1$	AND/OR
A4	$1 \bullet 1 = 1$	$0 + 0 = 0$	AND/OR
A5	$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	AND/OR

Θεωρήματα της Άλγεβρας Boole

#	Θεώρημα	Δυϊκό	Ονομασία
T1	$B \bullet 1 = B$	$B + 0 = B$	Ουδέτερο στοιχείο
T2	$B \bullet 0 = 0$	$B + 1 = 1$	Κυρίαρχο στοιχείο
T3	$B \bullet B = B$	$B + B = B$	Ταυτοδυναμία (ή αυτοδυναμία)
T4	$\overline{\overline{B}} = B$		Διπλό συμπλήρωμα
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	$B + \overline{B} = 1$	Συμπληρώματα

#	Θεώρημα	Δυϊκό	Ονομασία
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	$B + C = C + B$	Αντιμεταθετικότητα
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	$(B + C) + D = B + (C + D)$	Προσεταιριστικότητα
T8	$B \bullet (C + D) = (B \bullet C) + (B \bullet D)$	$B + (C \bullet D) = (B + C)\,(B + D)$	Επιμεριστικότητα
T9	$B \bullet (B + C) = B$	$B + (B \bullet C) = B$	Κάλυψη
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	$(B + C) \bullet (B + \overline{C}) = B$	Συνδυασμός
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D) = (B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D)$	$(B + C) \bullet (\overline{B} + D) \bullet (C + D) = (B + C) \bullet (\overline{B} + D)$	Ομοφωνία

#	Θεώρημα	Δυϊκό	Ονομασία
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots} = \overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots$	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots} = \overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2} \ldots$	Θεώρημα De Morgan

$$(\overline{A + B + C + D + E + \ldots\ldots\ldots}) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E} \cdot \ldots\ldots\ldots$$

$$(\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots}) = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} + \overline{E} + \ldots\ldots$$

Ιδιότητες των πυλών AND, OR, NOT

OR:	AND:
$A + 1 = 1$	$A \cdot 1 = A$
$A + 0 = A$	$A \cdot 0 = 0$
$A + A = A$	$A \cdot A = A$
$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$

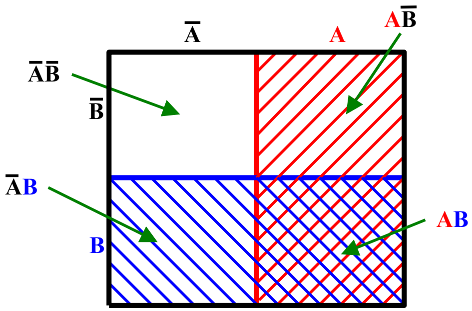
NOT: $\overline{\overline{A}} = A$

Λογικές συναρτήσεις XOR/XNOR

XOR: $A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

XNOR: $\overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

Πίνακες Karnaugh



B \ A	0	1
0	00 (0)	10 (2)
1	01 (1)	11 (3)

Πίνακας δύο μεταβλητών

C \ AB	00	01	11	10
0	000 (0)	010 (2)	110 (6)	100 (4)
1	001 (1)	011 (3)	111 (7)	101 (5)

Πίνακας τριών μεταβλητών

CD \ AB	00	01	11	10
00	0000 (0)	0100 (4)	1100 (12)	1000 (8)
01	0001 (1)	0101 (5)	1101 (13)	1001 (9)
11	0011 (3)	0111 (7)	1111 (15)	1011 (11)
10	0010 (2)	0110 (6)	1110 (14)	1010 (10)

Πίνακας τεσσάρων μεταβλητών

Παράδειγμα:

$f = \Sigma(0,2,8,10,15)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	1

$\bar{B}\cdot\bar{D}$

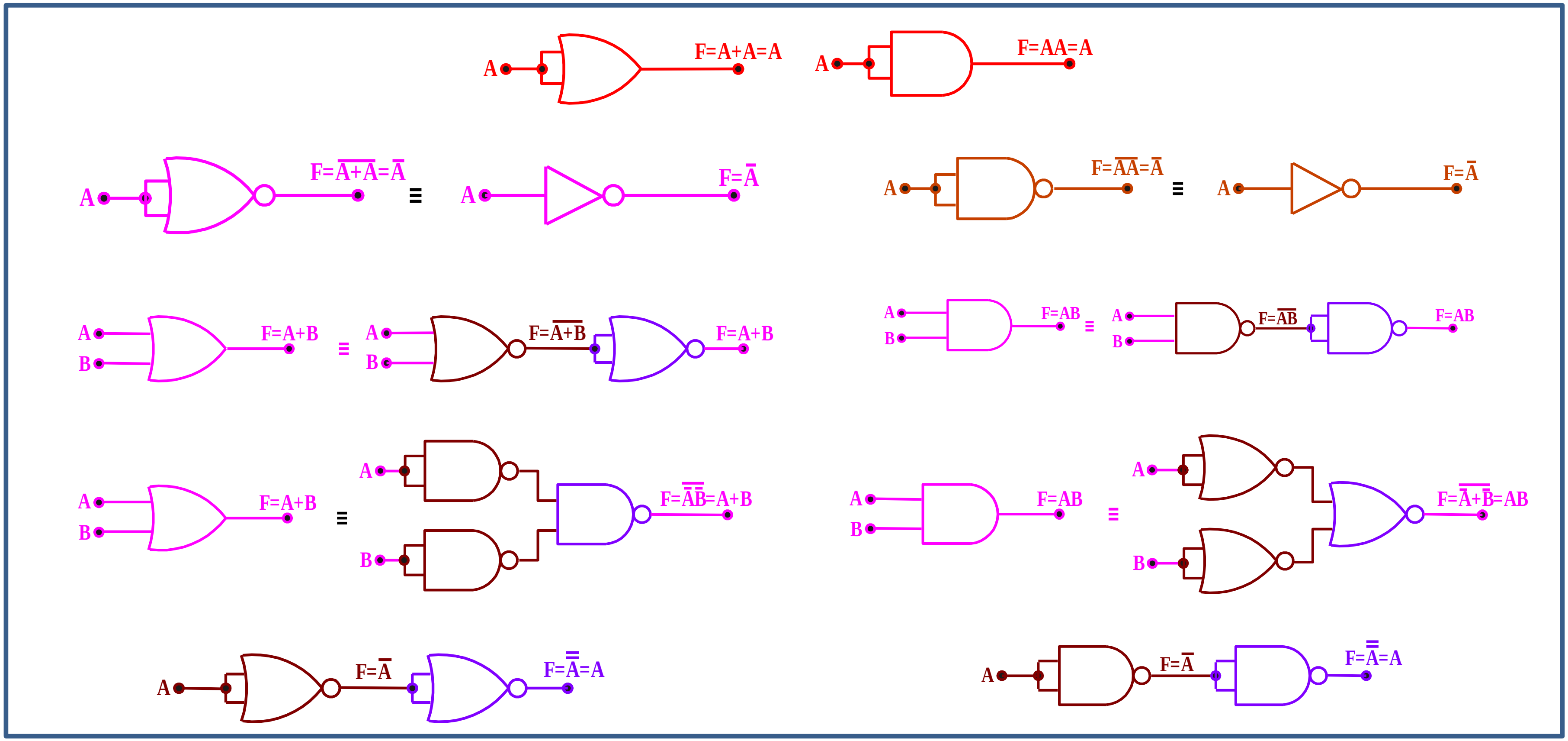
$A\cdot B\cdot C\cdot D$

$f_{min} = \bar{B}\cdot\bar{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D$

Η απλοποίηση (ελαχιστοποίηση) με τη μέθοδο αυτή γίνεται ως εξής:

- Με τη βοήθεια του νόμου του Shannon μετατρέπεται η λογική συνάρτηση σε άθροισμα ελαχίστων όρων.
- Τοποθετείται το ‘1’ στα τετραγωνίδια του πίνακα για κάθε όρο που υπάρχει στο άθροισμα ελαχίστων όρων και ‘0’ στα υπόλοιπα τετραγωνίδια.
- Σχηματίζονται βρόχοι από γειτονικά εφαπτόμενα τετραγωνίδια που περιέχουν το ‘1’. Επιλέγονται πάντα οι μεγαλύτεροι δυνατοί βρόχοι προσέχοντας το σύνολο των τετραγωνιδίων ενός βρόχου να δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{2^k}$ όπου ***k*** είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός (δηλαδή βρόχοι που θα αποτελούνται από 1, 2, 4, 8 και 16 τετραγωνίδια).
- Κάθε τετραγωνίδιο που περιέχει ‘1’ θα πρέπει να ληφθεί τουλάχιστον μία φορά.
- Ο πίνακας μπορεί να θεωρηθεί σαν κύλινδρος και τα τέσσερα ακραία τετραγωνάκια γωνίες σαν ένα βρόχος.
- Η ελάχιστη συνάρτηση θα αποτελείται από τόσους όρους όσοι και οι αριθμοί των βρόχων των τετραγωνιδίων.
- Κάθε όρος της ελάχιστης συνάρτησης θα αποτελείται από τις μεταβλητές εκείνες ή τις συμπληρωματικές τους των οποίων η τιμή δεν μεταβάλλεται στο πλαίσιο του βρόχου.

Ισοδυναμίες Λογικών Πυλών



Περίπτωση 1: Στην άλγεβρα Boole ισχύει:
Αντικατάσταση της πύλης NOT με πύλες NOR και NAND.

$$\overline{\mathbf{A}} = (\overline{\mathbf{A}+\mathbf{A}}) = (\overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}})$$

Περίπτωση 2: Στην άλγεβρα Boole ισχύει:

Αυτό σημαίνει ότι μία πύλη OR μπορεί να αντικατασταθεί με τρεις πύλες NAND.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}}$$

Περίπτωση 3: Στην άλγεβρα Boole ισχύει:

Αυτό σημαίνει ότι μία πύλη AND μπορεί να αντικατασταθεί με τρεις πύλες NOR.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}}$$