v.28_10_2024

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ
ΨΗΦΙΑΚΗ ΣΧΕΔΙΑΣΗ (106ΕΥΥΚ)
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ 2024-2025

Διάλεξη Νο2:
Λογικές Πύλες – Άλγεβρα Boole

Δ. Καραμπατζάκης, Επίκουρος Καθηγητής
email. dkara@cs.duth.gr

Δήλωση προσβασιμότητας

Σε αυτό το μάθημα όλες/οι οι φοιτήτριες/τές απολαμβάνουν – και αντίστοιχα υποχρεούνται να σέβονται – το δικαίωμα της ίσης μεταχείρισης. Δεν είναι ανεκτή και αποδεκτή κανενός τύπου και μορφής διάκριση με κριτήρια την εθνικότητα, τη φυλή, την καταγωγή, τη γλώσσα, το φύλο, τη θρησκεία, την ηλικία, την υγεία, τη σωματική ικανότητα, την ιδιωτική ζωή, τον γενετήσιο προσανατολισμό, τη σωματική ικανότητα και την οικονομική και κοινωνική κατάσταση στην οποία αυτοί βρίσκονται.

Το Πανεπιστήμιο άγρυπνα μεριμνά για τη διασφάλιση της αρχής των ίσων ευκαιριών και της ίσης μεταχείρισης. Οι κοινωνικές προκαταλήψεις και οι ιδεολογικές παρωπίδες είναι έννοιες τελείως ξένες με την επιστημονική πρόοδο την οποία το Πανεπιστήμιο είναι ταγμένο να υπηρετεί.

Ο Διδάσκων

Πληροφορίες για το Μάθημα

Διδάσκων:

Δημήτρης Καραμπατζάκης, Επίκουρος Καθηγητής

Αναλογικά και Ψηφιακά Ηλεκτρονικά Συστήματα

Μέλος Εργαστηρίου Βιομηχανικών και Εκπαιδευτικών Ενσωματωμένων Συστημάτων

Επικοινωνία / πληροφορίες:

Email. dkara@cs.duth.gr

web. http://www.internetofthings.gr/

Ώρες Γραφείου:

Τετάρτη και Πέμπτη 10.00 π.μ. -12.00 μ.μ.,

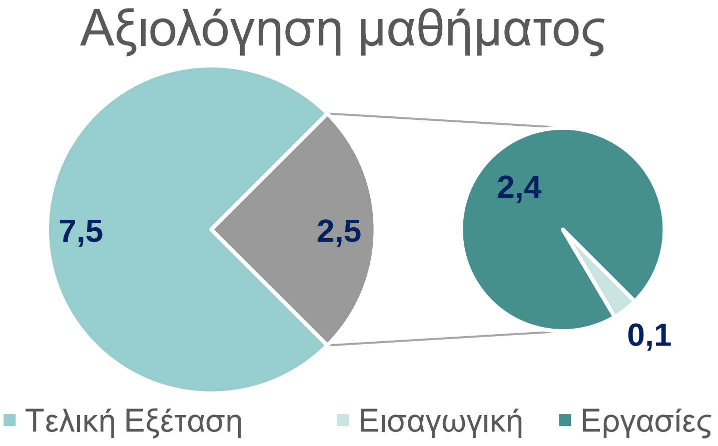
μετά από συνεννόηση με email στο ΦΕ 315 (πάνω από αιθ. Α1)

Πληροφορίες για το Μάθημα (Γενικές)

- **Κάθε Τρίτη 10.00 π.μ. - 12.00 μ.μ. και Πέμπτη 13.00 μ.μ. - 15.00 μ.μ. μάθημα θεωρίας στο Μεγάλο Αμφιθέατρο (μπορεί να αλλάζει με ανακοινώσεις).**
- **Η διαχείριση του μαθήματος θα γίνει με χρήση της υπηρεσίας https://courses.cs.duth.gr**
- **Όλοι οι φοιτητές πρέπει να έχουν λογαριασμό στο uregister.**
- **Η ιστοσελίδα με τις πληροφορίες του μαθήματος: http://iees.cs.ihu.gr/?page_id=3096**
- **Υλικό του μαθήματος στο moodle: https://moodle.cs.duth.gr/**

Πληροφορίες για το Μάθημα (Αξιολόγηση)

- **Η βαθμολογία είναι 75% από την τελική εξέταση και 25% από τις ατομικές εργασίες (1+1 σετ ασκήσεων) που θα δοθούν για το σπίτι.**
- **Η τελική εξέταση είναι με ανοιχτό το κύριο σύγγραμμα του μαθήματος.**
- **Ο βαθμός του μαθήματος (ΒΜ = ΓΕ*0,75 + ΣΑ*0,25) πρέπει να είναι τουλάχιστον πέντε (5).**



Πληροφορίες για το Μάθημα (Μονάδες)

- **Κωδικός Μαθήματος:** 106ΕΥΥΚ
- **Εξάμηνο:** 1ο
- **Τύπος Μαθήματος:** Υποβάθρου, Ανάπτυξης Δεξιοτήτων
- **Είδος Μαθήματος:** Υποχρεωτικό (ΥΠ)
- **Διδασκαλία Θεωρίας:** 3 ώρες/εβδομάδα
- **Διδασκαλία Φροντιστήριο:** 1 ώρες/εβδομάδα
- **Πιστωτικές μονάδες ECTS: 7**
- **Γλώσσα διδασκαλίας και Εξετάσεων:** Ελληνικά

Πληροφορίες για το Μάθημα (Φόρτος)

Δραστηριότητα	Φόρτος εργασίας εξαμήνου
Διαλέξεις	78 ώρες
Φροντιστηριακές Ασκήσεις	26 ώρες
Γραπτές Εξετάσεις	2 ώρες
Γραπτές Εργασίες	34 ώρες
Αυτοτελής Μελέτη	35 ώρες
Σύνολο	**175 ώρες (7 ECTS)**

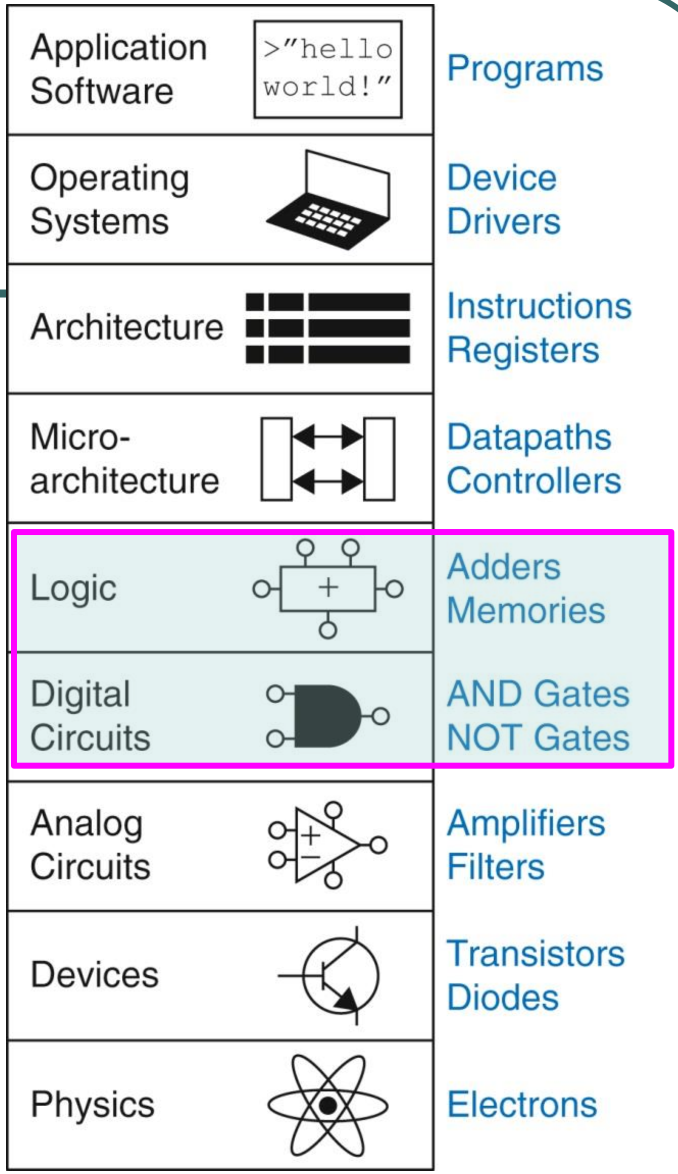
Κύριο Σύγγραμμα Μαθήματος (ΕΥΔΟΞΟΣ)

Ψηφιακή Σχεδίαση
με τις Γλώσσες VHDL και Verilog

Συγγραφέας: Πογαρίδης Δημήτριος

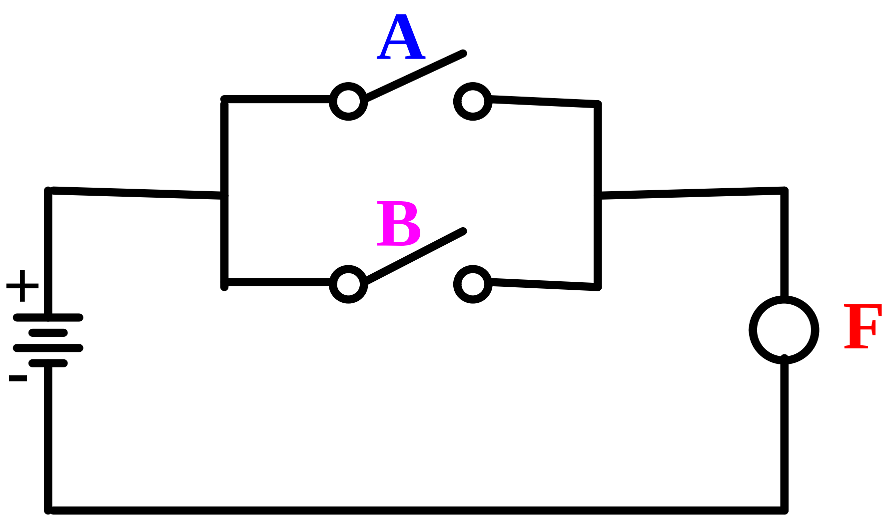
Έτος Έκδοσης: 2019
Κωδικός στον Εύδοξο: **86192991**

Επίπεδα Αφαίρεσης

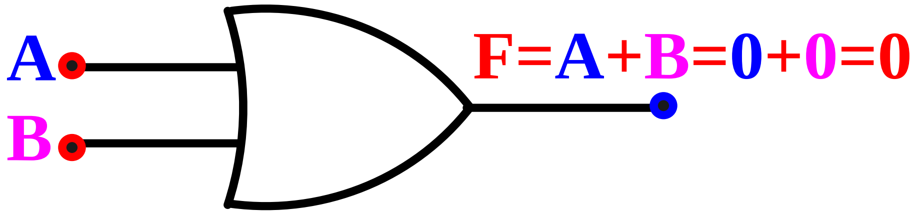


Λογικές Πύλες
Άλγεβρα Boole

Πύλη OR (Ή)



(α)

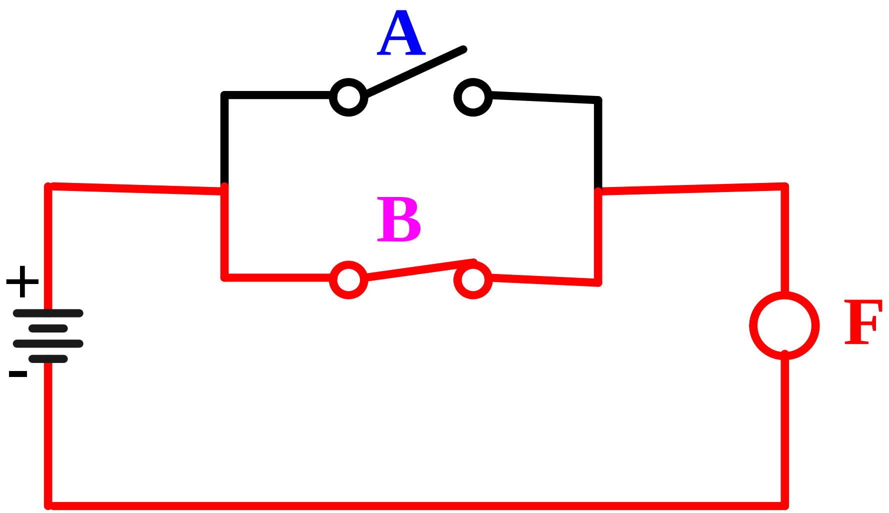


(β)

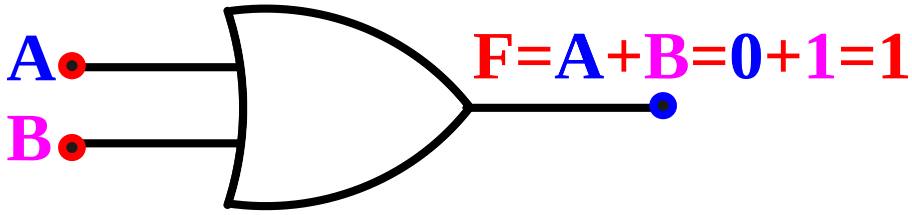
A	B	F
0	0	0

(γ)

Πύλη OR (Ή)



(α)

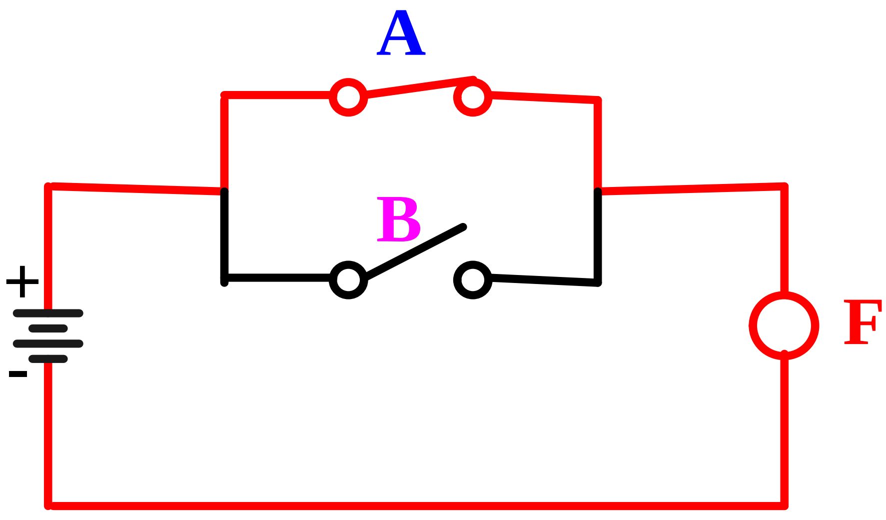


(β)

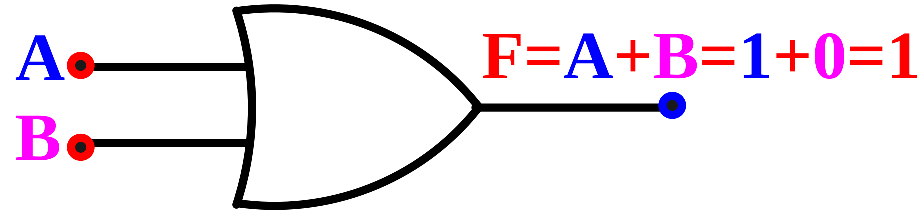
A	B	F
0	0	0
0	1	1

(γ)

Πύλη OR (Ή)



(α)

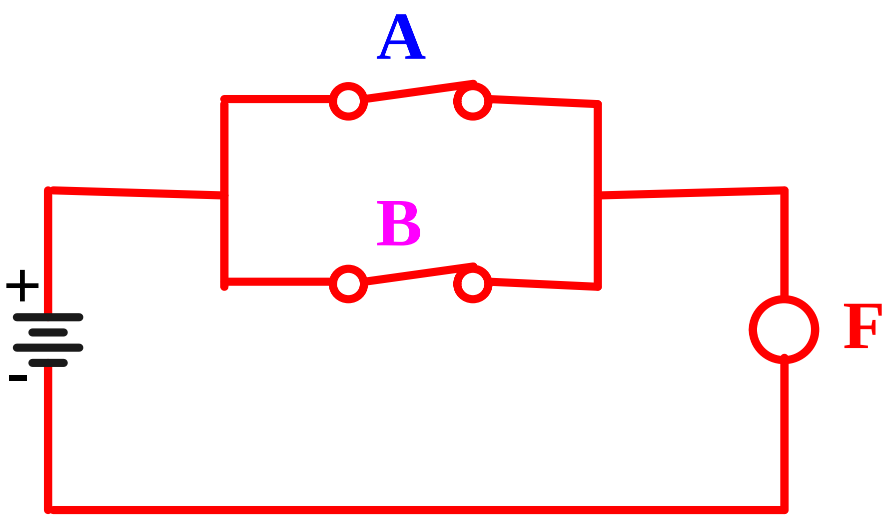


(β)

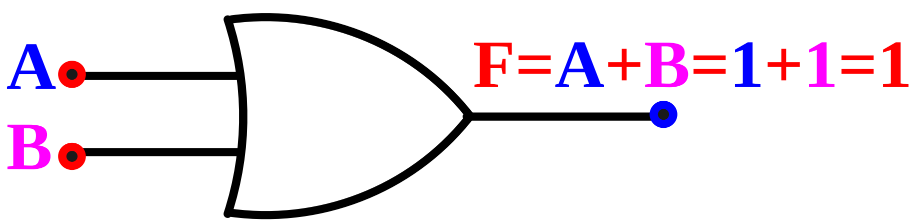
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1

(γ)

Πύλη OR (Ή)



(α)

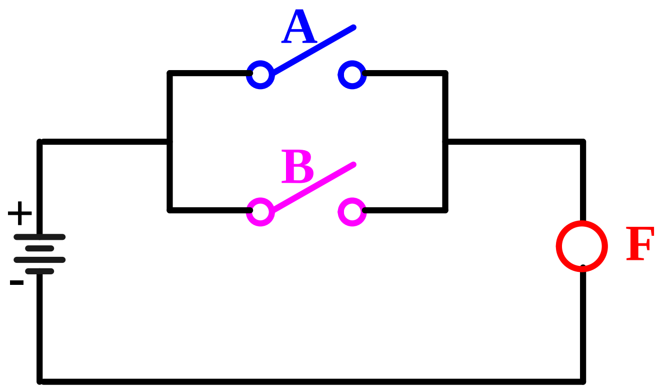


(β)

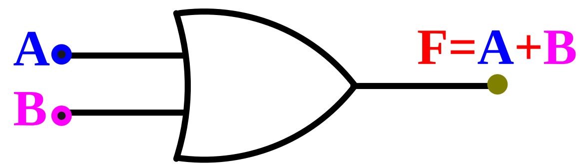
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(γ)

Πύλη OR (Ή)



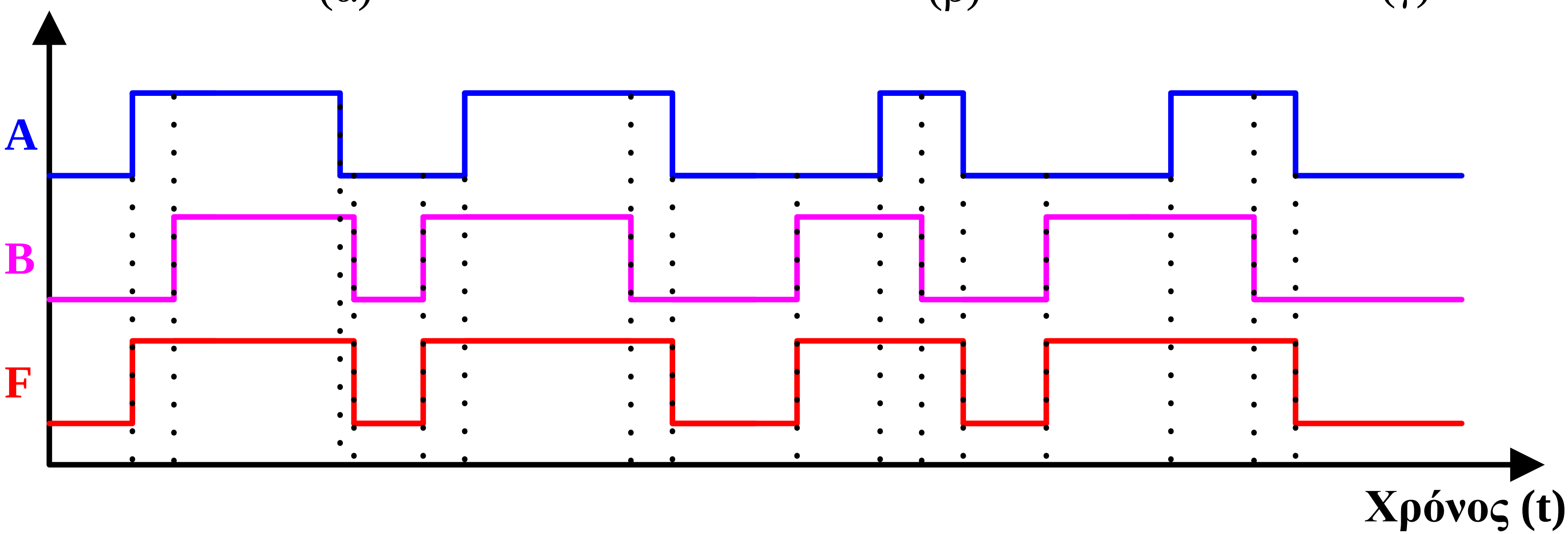
(α)



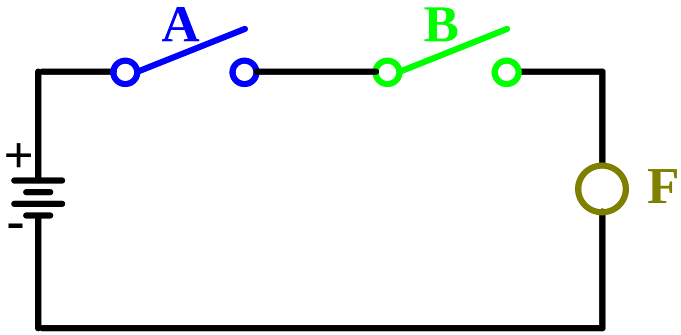
(β)

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

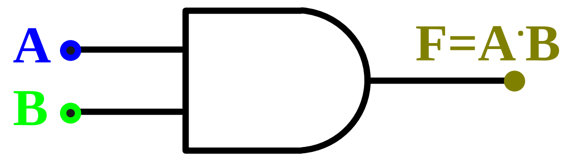
(γ)



Πύλη AND (ΚΑΙ)



(α)

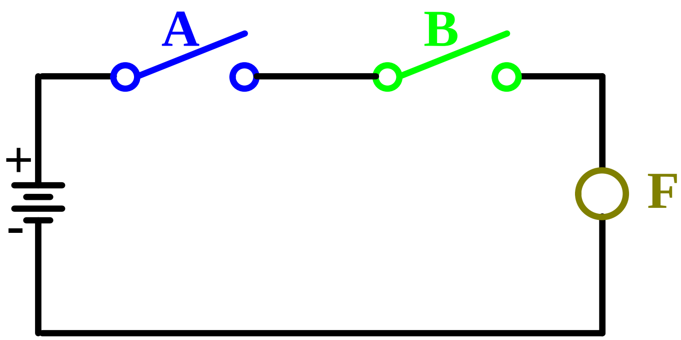


(β)

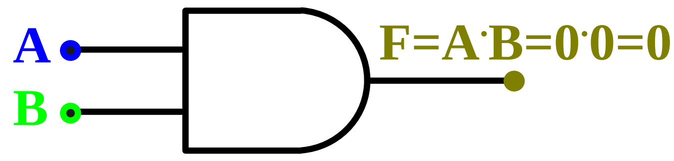
A	B	F

(γ)

Πύλη AND (ΚΑΙ)



(α)

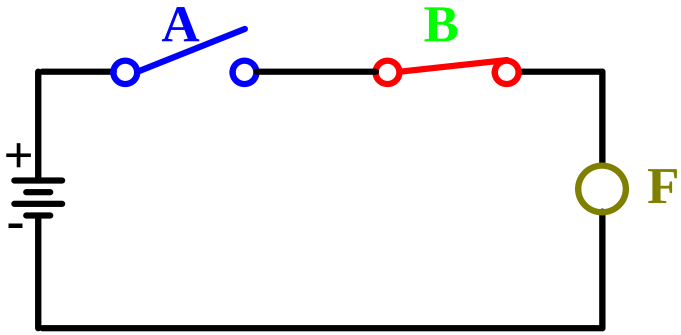


(β)

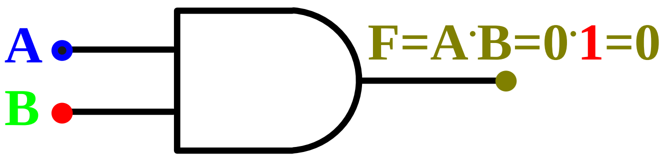
A	B	F
0	0	0

(γ)

Πύλη AND (ΚΑΙ)



(α)

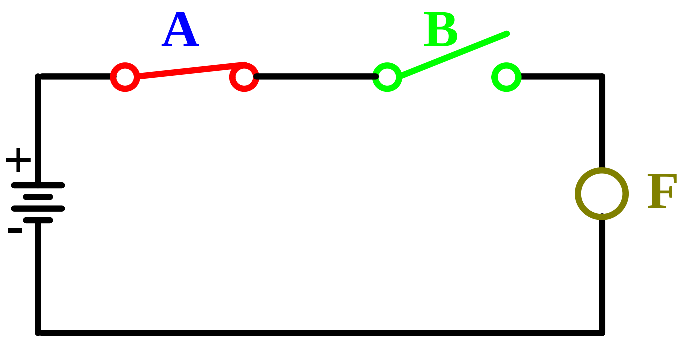


(β)

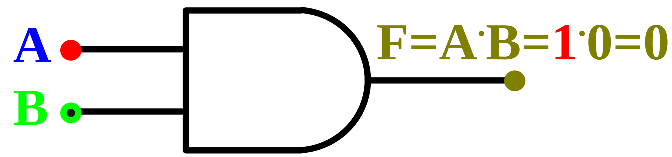
A	B	F
0	0	0
0	1	0

(γ)

Πύλη AND (ΚΑΙ)



(α)

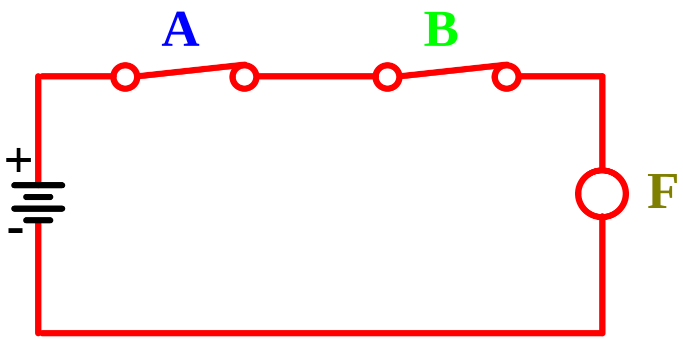


(β)

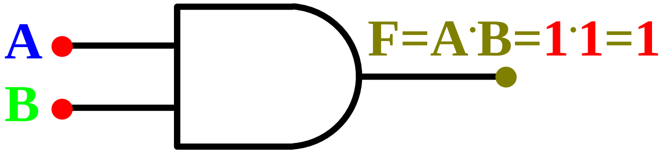
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0

(γ)

Πύλη AND (ΚΑΙ)



(α)

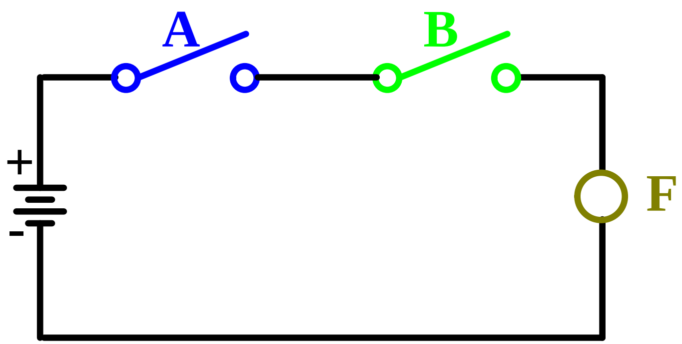


(β)

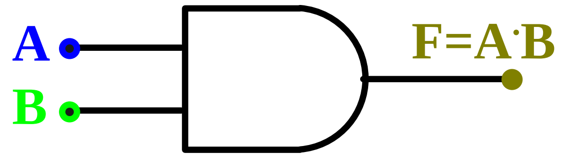
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(γ)

Πύλη AND (ΚΑΙ)



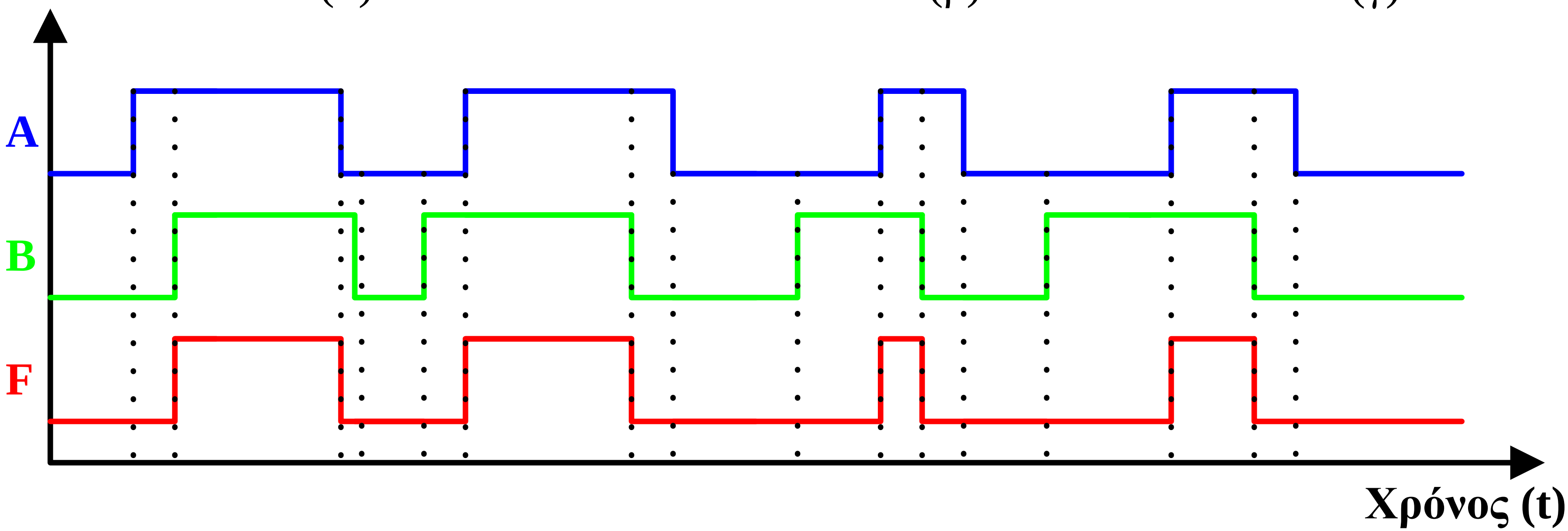
(α)



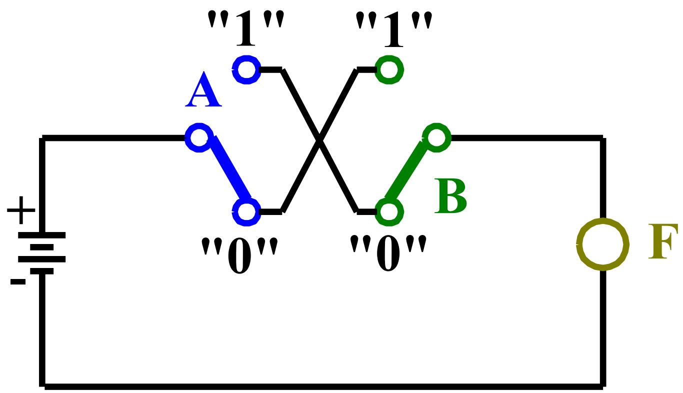
(β)

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

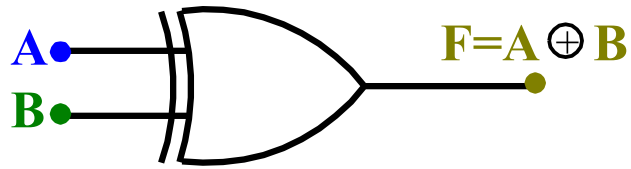
(γ)



Πύλη EXclusiveOR (αποκλειστικού Ή)



(α)

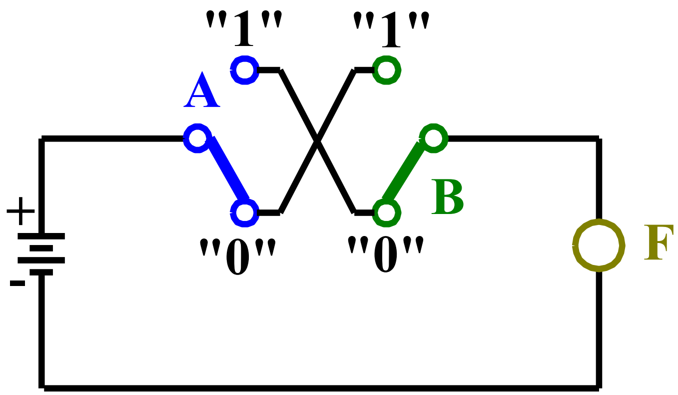


(β)

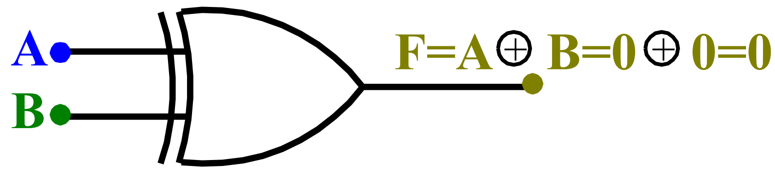
A	B	F

(γ)

Πύλη EXclusiveOR (αποκλειστικού Ή)



(α)

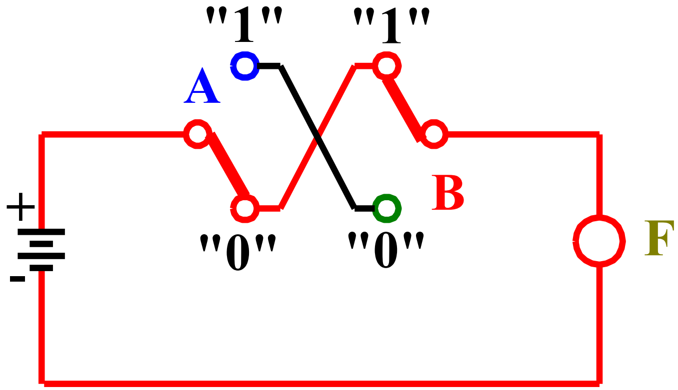


(β)

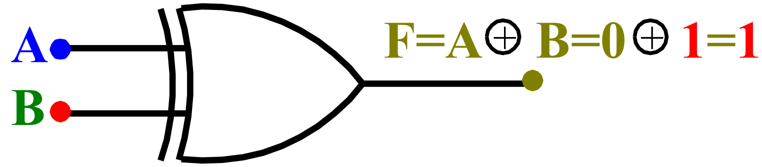
A	B	F
0	0	0

(γ)

Πύλη EXclusiveOR (αποκλειστικού Ή)



(α)

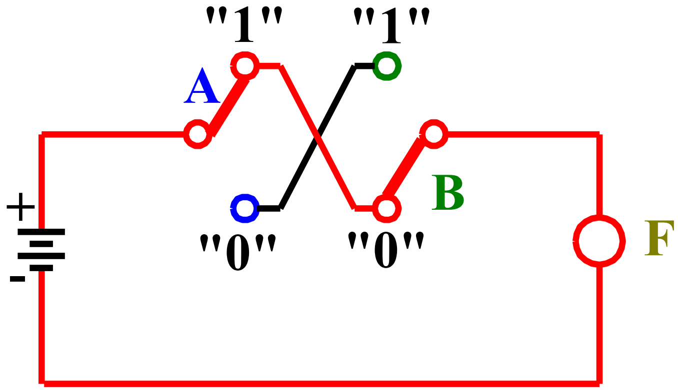


(β)

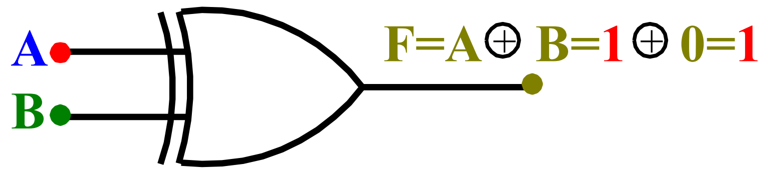
A	B	F
0	0	0
0	1	1

(γ)

Πύλη EXclusiveOR (αποκλειστικού Ή)



(α)

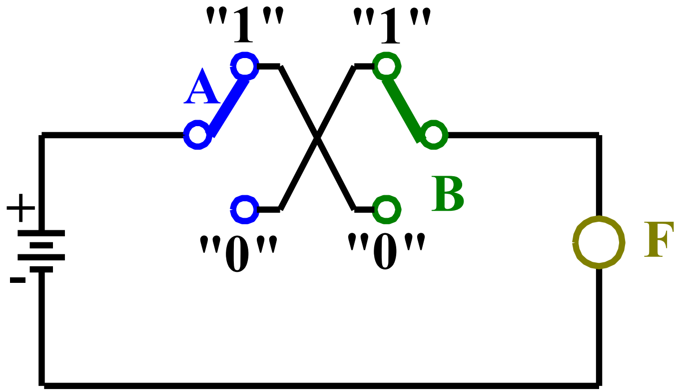


(β)

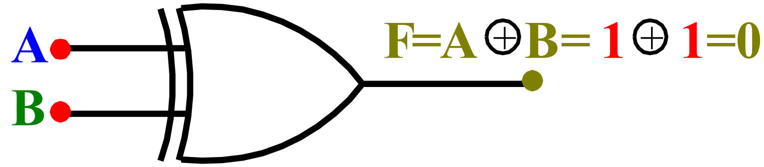
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1

(γ)

Πύλη EXclusiveOR (αποκλειστικού Ή)



(α)

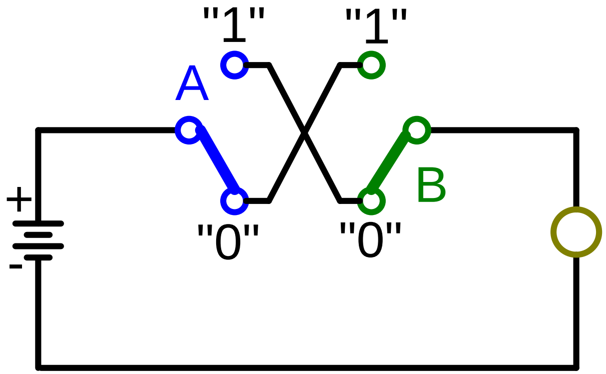


(β)

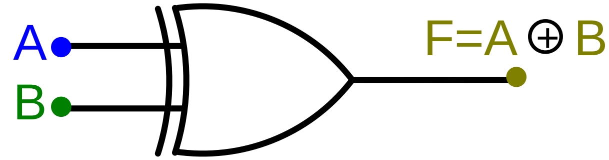
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(γ)

Πύλη EXclusiveOR (αποκλειστικού Ή)



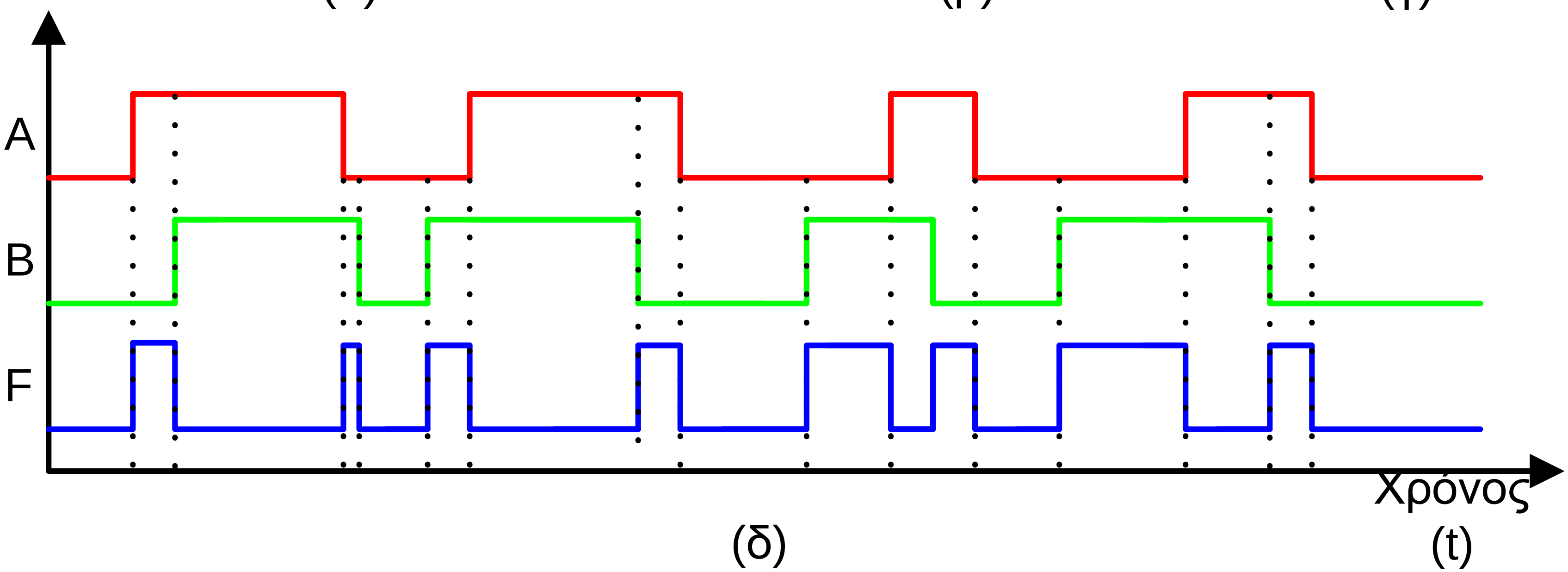
(α)



(β)

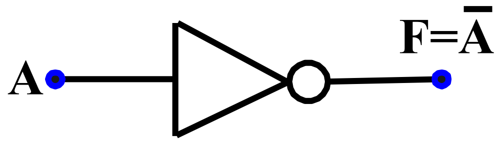
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(γ)



(δ)

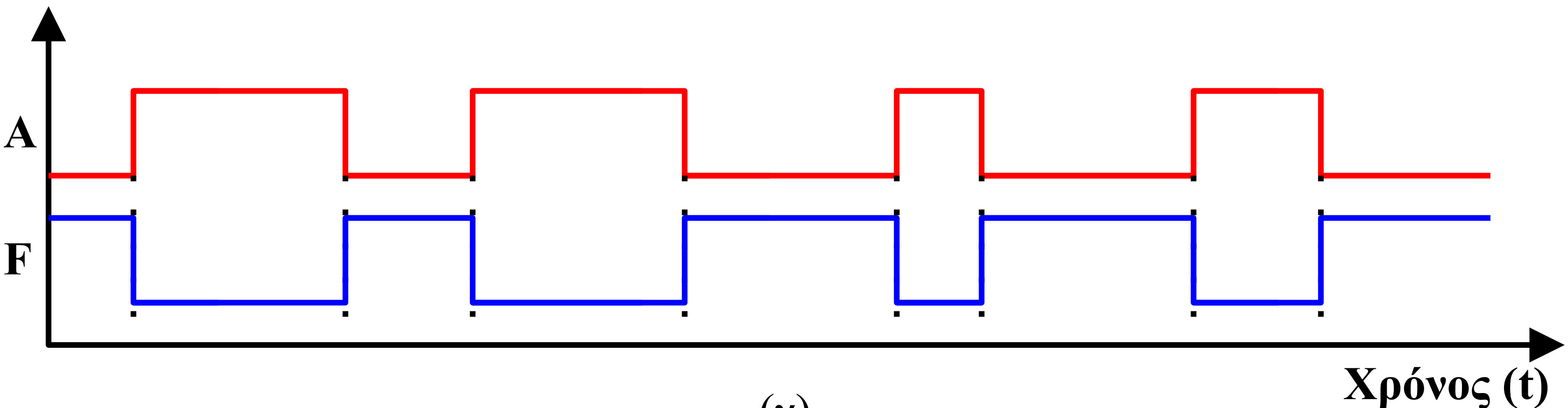
Πύλη NOT (ΌΧΙ)



(α)

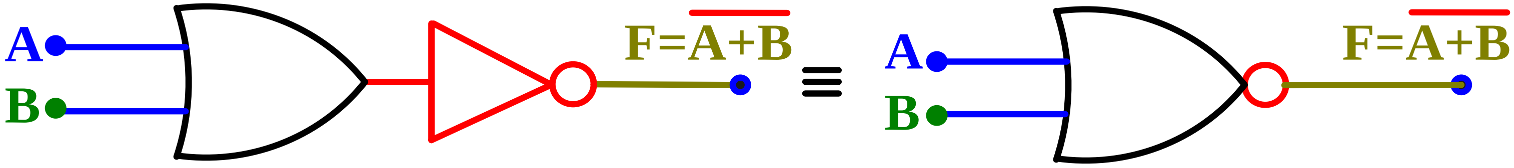
A	F
0	1
1	0

(β)



(γ)

Πύλη Not OR (NOR)

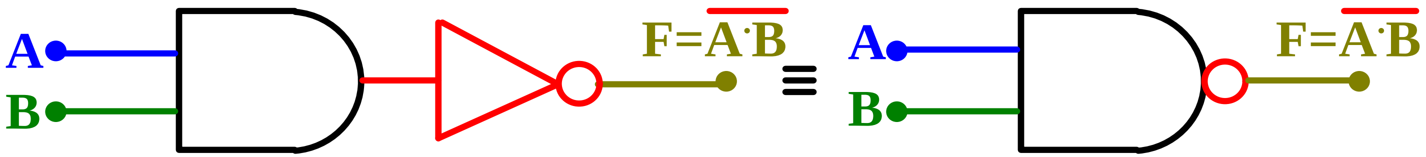


(α)

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(β)

Πύλη Not AND (NAND)

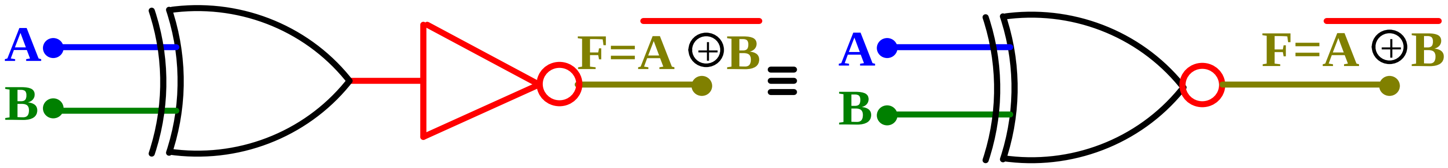


(α)

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(β)

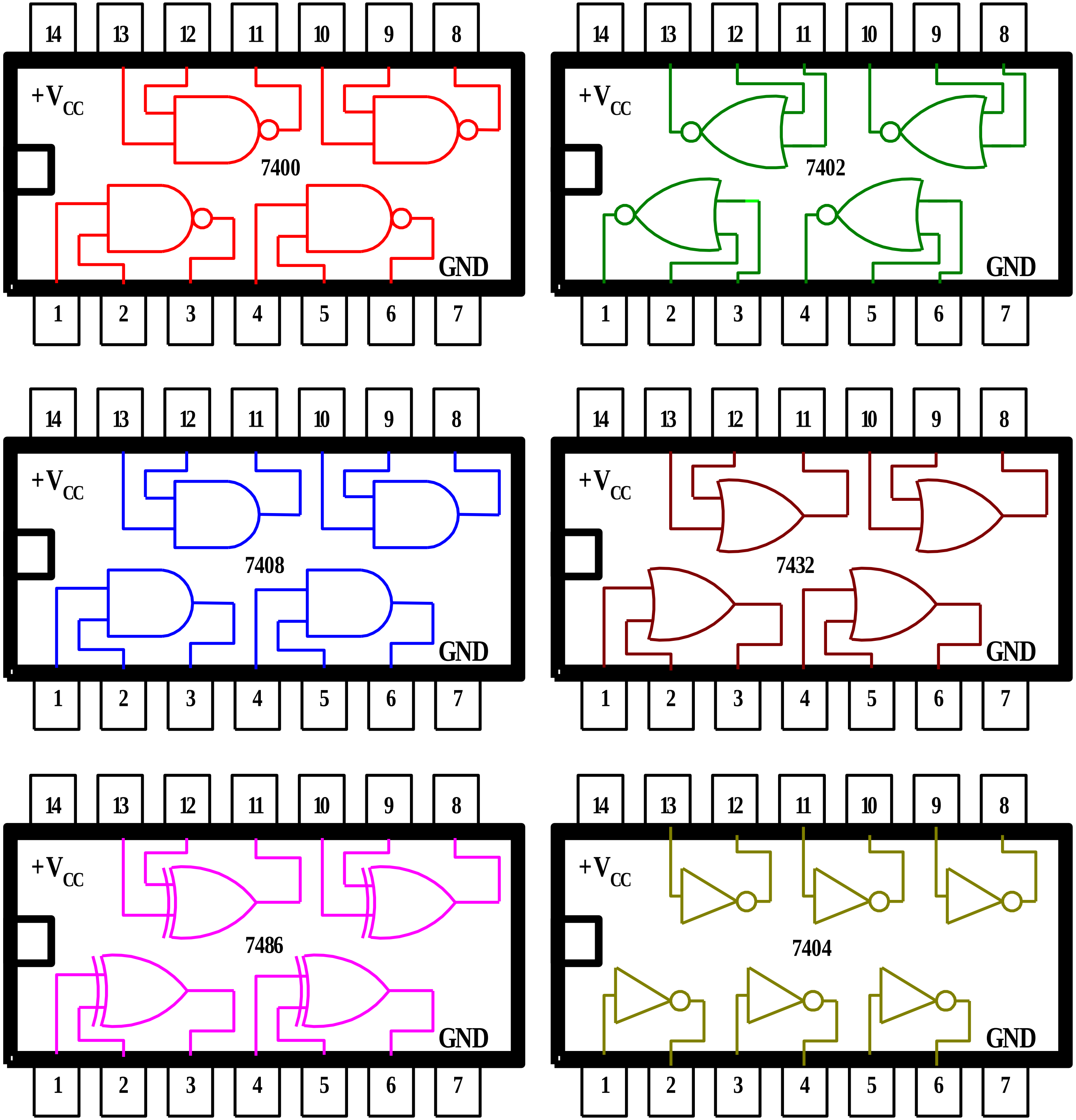
Πύλη EXclusive Not OR (EXNOR)



(α)

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

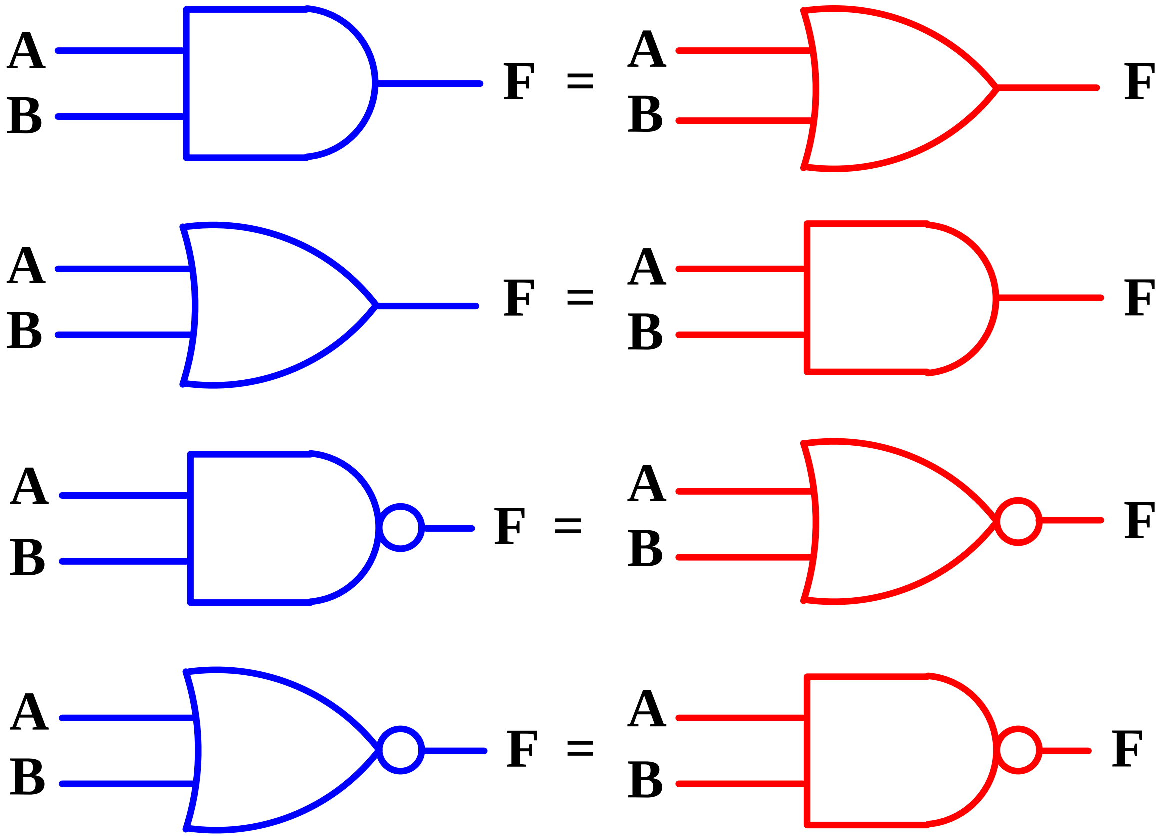
(β)



Οι πύλες υπάρχουν και σε μορφή ολοκληρωμένων κυκλωμάτων

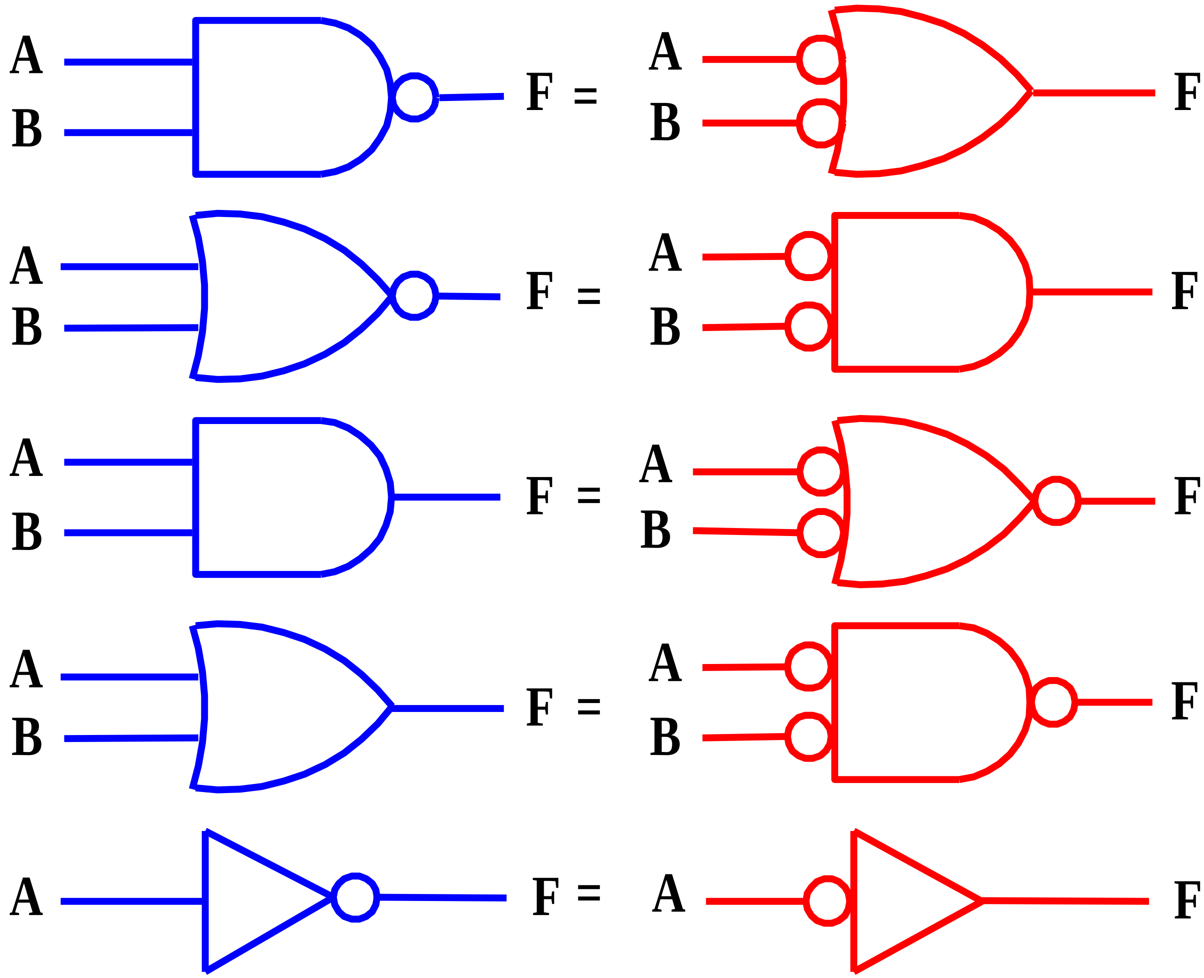
Αρνητική λογική

Θετική Λογική Αρνητική Λογική



Ανάμικτη Λογική

Θετική Λογική | Ανάμικτη Λογική



Αξιώματα και Θεωρήματα της Άλγεβρας Boole

Δυϊσμός

Τα αξιώματα και τα θεωρήματα της Άλγεβρας Boole ακολουθούν την αρχή του **δυϊσμού (ή δυϊκότητας).**

Αν σε μια λογική παράσταση τα σύμβολα 0 και1 και οι τελεστές • (AND) και + (OR) εναλλαχθούν, η λογική παράσταση θα εξακολουθεί να είναι ορθή.

Αξιώματα

Τα αξιώματα είναι αναπόδεικτα με την έννοια ότι ένας ορισμός δεν μπορεί να αποδειχθεί.

#	Αξίωμα	Δυϊκό	Ονομασία
A1	B = 0 αν $B \neq 1$	B = 1 αν $B \neq 0$	Δυαδικό πεδίο
A2	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$	NOT
A3	$0 \cdot 0 = 0$	$1 + 1 = 1$	AND/OR
A4	$1 \cdot 1 = 1$	$0 + 0 = 0$	AND/OR
A5	$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	AND/OR

Θεωρήματα

Τα παρακάτω θεωρήματα περιγράφουν πως μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε εξισώσεις οι οποίες περιέχουν μία μεταβλητή.

#	Θεώρημα	Δυϊκό	Ονομασία
T1	$B \bullet 1 = B$	$B + 0 = B$	Ουδέτερο στοιχείο
T2	$B \bullet 0 = 0$	$B + 1 = 1$	Κυρίαρχο στοιχείο
T3	$B \bullet B = B$	$B + B = B$	Ταυτοδυναμία (ή αυτοδυναμία)
T4	$\overline{\overline{B}} = B$		Διπλό συμπλήρωμα
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	$B + \overline{B} = 1$	Συμπληρώματα

Θεωρήματα

Τα παρακάτω θεωρήματα περιγράφουν πως μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε εξισώσεις οι οποίες περιέχουν περισσότερες από μία μεταβλητές Boole.

#	Θεώρημα	Δυϊκό	Ονομασία
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	$B+C = C+B$	Αντιμεταθετικότητα
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	$(B + C) + D = B + (C + D)$	Προσεταιριστικότητα
T8	$B \bullet (C + D) = (B \bullet C) + (B \bullet D)$	$B + (C \bullet D) = (B+C)(B+D)$	Επιμεριστικότητα
T9	$B \bullet (B+C) = B$	$B + (B \bullet C) = B$	Κάλυψη
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	$(B+C) \bullet (B+\overline{C}) = B$	Συνδυασμός
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D) =$ $(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D)$	$(B+C) \bullet (\overline{B}+D) \bullet (C+D) =$ $(B+C) \bullet (\overline{B}+D)$	Ομοφωνία

Το Θεώρημα

#	Θεώρημα	Δυϊκό	Ονομασία
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \ldots}$ $=\overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ldots$	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \ldots}$ $=\overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2} \ldots$	Θεώρημα De Morgan

Το συμπλήρωμα των γινομένων
είναι το άθροισμα των συμπληρωμάτων.

Δυϊκό:

Το συμπλήρωμα των αθροισμάτων
είναι το γινόμενο των συμπληρωμάτων.

Ορολογία

- **Συμπλήρωμα (Complement)**: το συμπλήρωμα μιας μεταβλητής (μπάρα, τόνος ‘, ! , ~, ¬)
  $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$
- **Λεκτικό (Literal)**: μια μεταβλητή ή το συμπλήρωμα της
  A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, C, $\overline{C}$
- **Όρος (Implicant)**: λογικό γινόμενο λεκτικών
  $A\overline{B}C$, $A\overline{C}$, BC
- **Ελαχιστόρος (Minterm)**: γινόμενο που εμπεριέχει όλες τις μεταβλητές εισόδου
  $A\overline{B}\overline{C}$, $\overline{A}BC$, ABC
- **Μεγιστόρος (Maxterm)**: άθροισμα που εμπεριέχει όλες τις μεταβλητές εισόδου
  $(A+\overline{B}+\overline{C})$, $(A+B+\overline{C})$, (A+B+C)

Προτεραιότητα Τελεστών

Η προτεραιότητα των τελεστών για τον υπολογισμό εκφράσεων Boole είναι η εξής:

- πρώτα ότι βρίσκεται μέσα σε παρενθέσεις (),
- η πράξη NOT δηλ. τα συμπληρώματα,
- η πράξη AND,
- και τέλος η πράξη OR.

#	Θεώρημα	Ονομασία
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D) =$ $(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D)$	Ομοφωνία

Αποδείξτε το T11 με τα αξιώματα και τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole:

$B \bullet C + \overline{B} \bullet D + C \bullet D$

$= BC + \overline{B}D + (CDB + CD\overline{B})$ **T10: Συνδυασμός**

$= BC + \overline{B}D + BCD + \overline{B}CD$ **T6: Αντιμεταθετικότητα**

$= BC + BCD + \overline{B}D + \overline{B}CD$ **T6: Αντιμεταθετικότητα**

$= (BC + BCD) + (\overline{B}D + \overline{B}CD)$ **T7: Προσεταιριστικότητα**

$= BC + \overline{B}D$ **T9': Κάλυψη**

Ιδιότητες των πυλών AND, OR, NOT

Ιδιότητες της πράξης OR:

$$A + 1 = 1$$

$$A + 0 = A$$

$$A + A = A$$

$$A + \overline{A} = 1$$

Ιδιότητες της πράξης AND:

$$A \cdot 1 = A$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot A = A$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

Ιδιότητες της πράξης NOT:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Σχέσεις που ισχύουν στην Άλγεβρα Boole

1. $(A+B)\cdot(A+\overline{B})$

$=A\cdot A+A\cdot\overline{B}+A\cdot B+B\cdot\overline{B}$

$=A+A\cdot\overline{B}+A\cdot B$

$=A\cdot(1+\overline{B}+B)=A\cdot 1=A$

2. $A+\overline{A}\cdot B$

$=A\cdot(1+B)+\overline{A}\cdot B$

$=A+A\cdot B+\overline{A}\cdot B$

$=A+(A+\overline{A})\cdot B$

$=A+1\cdot B=A+B$

Σχέσεις που ισχύουν στην Άλγεβρα Boole

3. $A \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$

$= A \cdot C \cdot (1+B) + \overline{A} \cdot B \cdot C$

$= A \cdot C + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$

$= A \cdot C + (A+\overline{A}) \cdot B \cdot C$

$= A \cdot C + B \cdot C$

$= (A+B) \cdot C$

4. $A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C$

$= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C \cdot (A+\overline{A})$

$= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$

$= A \cdot B \cdot (1+C) + \overline{A} \cdot C \cdot (1+B)$

$= A \cdot B \cdot 1 + \overline{A} \cdot C \cdot 1$

$= A \cdot B + \overline{A} \cdot C$

Σχέσεις που ισχύουν στην Άλγεβρα Boole

5. $(A+B)\cdot(A+C)$

$=A\cdot A+A\cdot C+B\cdot A+B\cdot C$

$=A+A\cdot C+A\cdot B+B\cdot C$

$=A\cdot(1+C+B)+B\cdot C$

$=A\cdot 1+B\cdot C$

$=A+B\cdot C$

6. $A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$

$=\overline{\overline{(A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B)}}$

$=\overline{(\overline{(A\cdot\overline{B})}\cdot\overline{\overline{A}\cdot B})}$

$=\overline{((\overline{A}+B)\cdot(A+\overline{B}))}$

$=\overline{(A\cdot\overline{A}+\overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot B+B\cdot\overline{B})}$

$=\overline{(\overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot B)}\ =\overline{(\overline{A}\cdot\overline{B})}\,\overline{(A\cdot B)}\ =(A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})$

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ποια πύλη υλοποιεί αυτή η σχέση?

Σχέσεις που βοηθούν στην απλοποίηση

- **Προσεταιριστικότητα (T8, T8')** $B(C+D) = BC + BD$

  $B + CD = (B+C)(B+D)$

- **Κάλυψη (T9')** $A + AP = A$

- **Συνδυασμός (T10)** $P\overline{A} + PA = P$

- **Επέκταση** $P = P\overline{A} + PA$

  $A = A + AP$

- **Διπλασιασμός** $A = A + A$

- **Θεώρημα "Απλοποίησης"** $P\overline{A} + A = P + A$

  $PA + \overline{A} = P + \overline{A}$

Πότε μια συνάρτηση έχει ελαχιστοποιηθεί;

Ορίζουμε ότι μια εξίσωση/συνάρτηση γραμμένη σε μορφή αθροίσματος γινομένων **ως «ελαχιστοποιημένη» αν χρησιμοποιεί τους λιγότερους δυνατούς όρους**.

Αν υπάρχουν αρκετές εξισώσεις με το ίδιο πλήθος όρων, **ως «ελαχιστοποιημένη» εξίσωση θεωρείται εκείνη με τα λιγότερα λεκτικά.**

Ένας όρος ονομάζεται **πρώτος όρος (prime implicant)** αν δεν μπορεί να συνδυαστεί με οποιουσδήποτε άλλους όρους της εξίσωσης, ώστε να προκύψει ένας νέος όρος με λιγότερα λεκτικά.

Όλοι οι όροι σε μια ελαχιστοποιημένη εξίσωση πρέπει να είναι πρώτοι όροι. Διαφορετικά, θα μπορούσαν να συνδυαστούν ώστε να μειωθεί το πλήθος των λεκτικών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1

Να βρεθεί το συμπλήρωμα της λογικής συνάρτησης f, να απλοποιηθεί αλγεβρικά και να παρθεί στην ελάχιστη μορφή της f_{min}.

$$f = (A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B})\{[(\overline{B} + \overline{C}) \cdot \overline{D}] + D\}$$

$$f = (A\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B})\{[(\overline{B}+\overline{C})\cdot\overline{D}] + D\}$$

$$\overline{f} = \{\overline{(A\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B})\{[(\overline{B}+\overline{C})\cdot\overline{D}] + D\}}\}$$

$$= \overline{(A\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B})} + \{\overline{[(\overline{B}+\overline{C})\cdot\overline{D}] + D\}}$$

$$= [\overline{(A\cdot\overline{C})}\cdot\overline{(\overline{A}\cdot\overline{B})}] + \{\overline{[(\overline{B}+\overline{C})\cdot\overline{D}]}\cdot\overline{D}\}$$

$$= (\overline{A}+C)\cdot(A+B) + [\overline{(\overline{B}+\overline{C})} + D]\cdot\overline{D}$$

$$= (\overline{A}+C)\cdot(A+B) + (B\cdot C + D)\cdot\overline{D}$$

$$= \overline{A}\cdot A + \overline{A}\cdot B + A\cdot C + B\cdot C + B\cdot C\cdot\overline{D} + D\cdot\overline{D}$$

$$= \overline{A}\cdot B + A\cdot C + B\cdot C + B\cdot C\cdot\overline{D}$$

$$= \overline{A}\cdot B + A\cdot C + B\cdot C\cdot(1+\overline{D})$$

$$= \overline{A}\cdot B + A\cdot C + B\cdot C \quad = \overline{A}\cdot B + A\cdot C + B\cdot C\cdot(A+\overline{A})$$

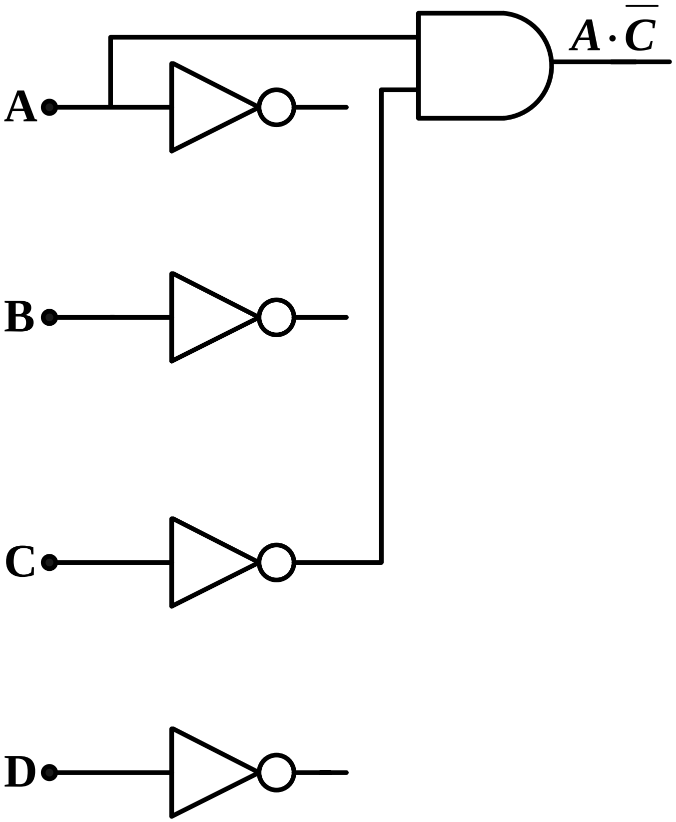
$$= \overline{A}\cdot B + A\cdot C + A\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot C$$

$$= \overline{A}\cdot B\cdot(1+C) + A\cdot C\cdot(1+B)$$

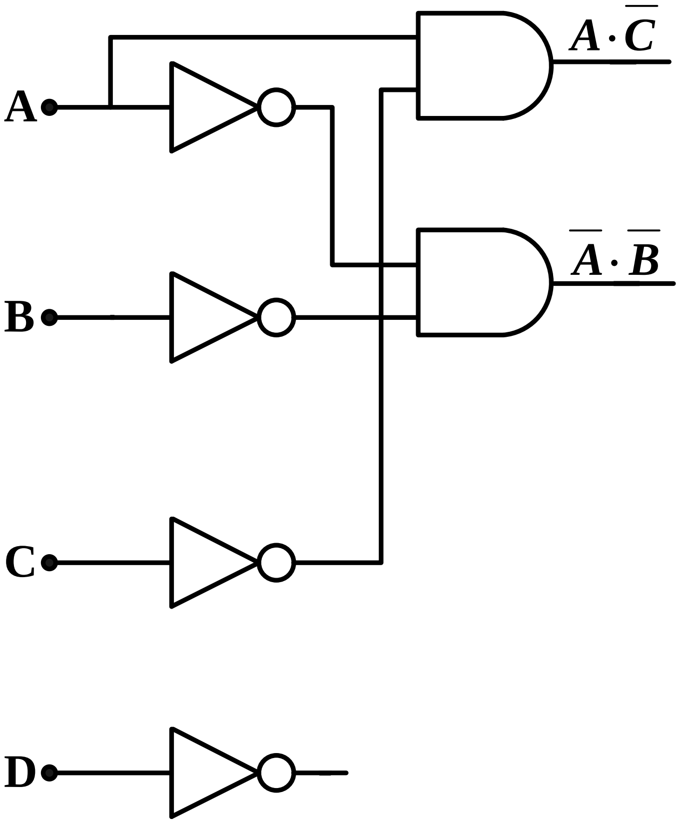
$$= \overline{A}\cdot B + A\cdot C$$

$$= \overline{f}_{\min}$$

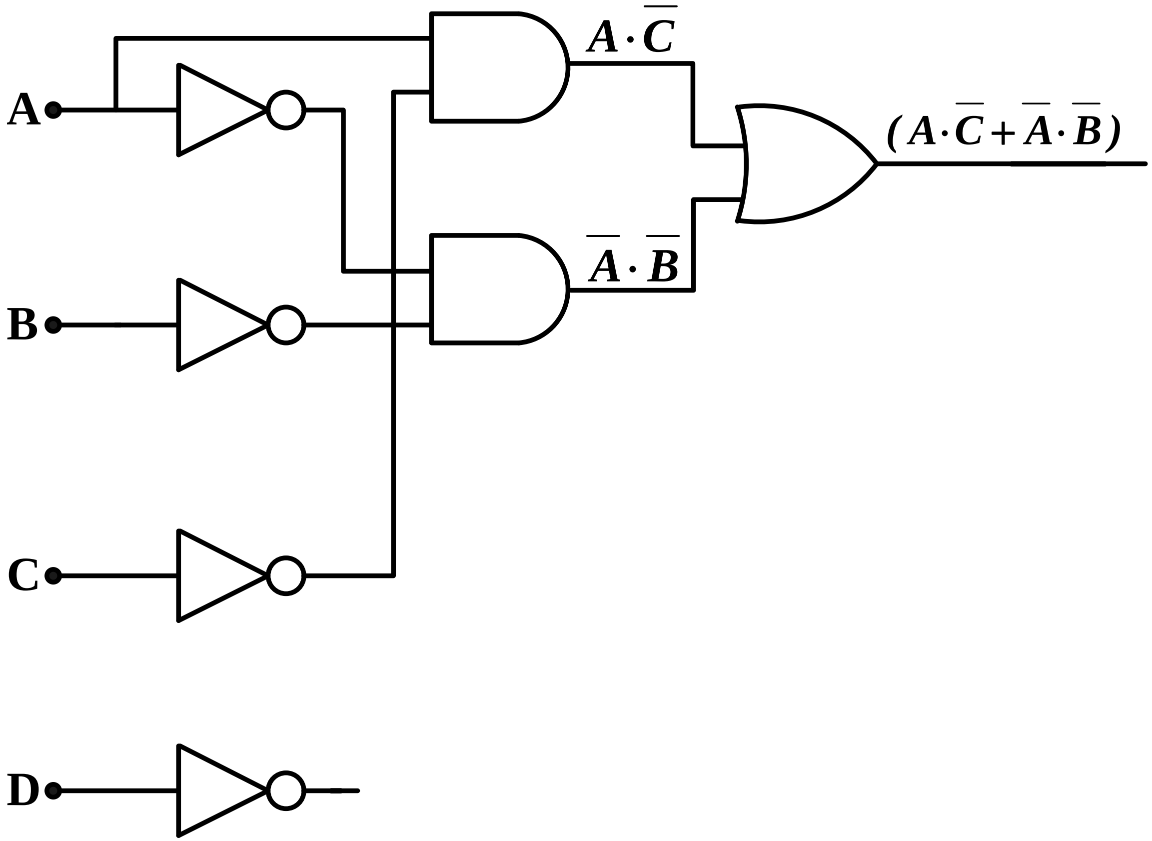
$$f = (\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{C}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})\{[(\overline{\mathrm{B}} + \overline{\mathrm{C}}) \cdot \overline{\mathrm{D}}] + D\}$$



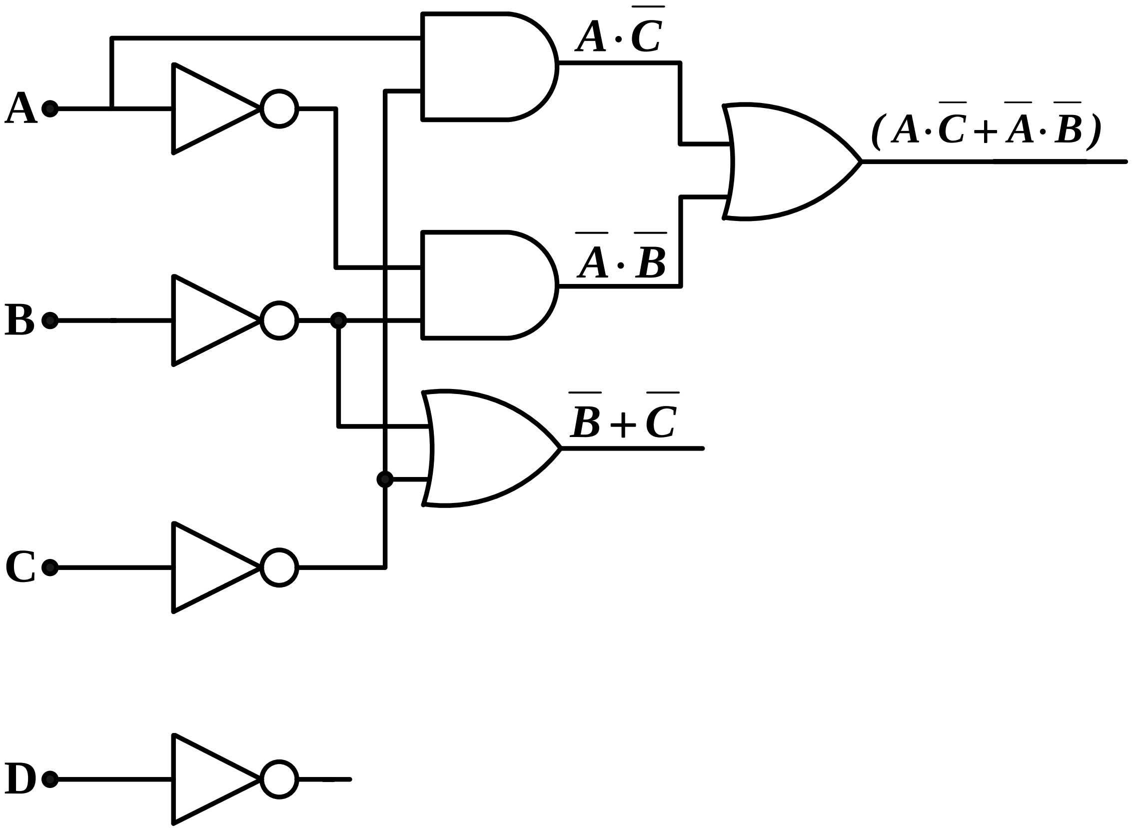
$$f = (A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B})\{[(\overline{B} + \overline{C}) \cdot \overline{D}] + D\}$$



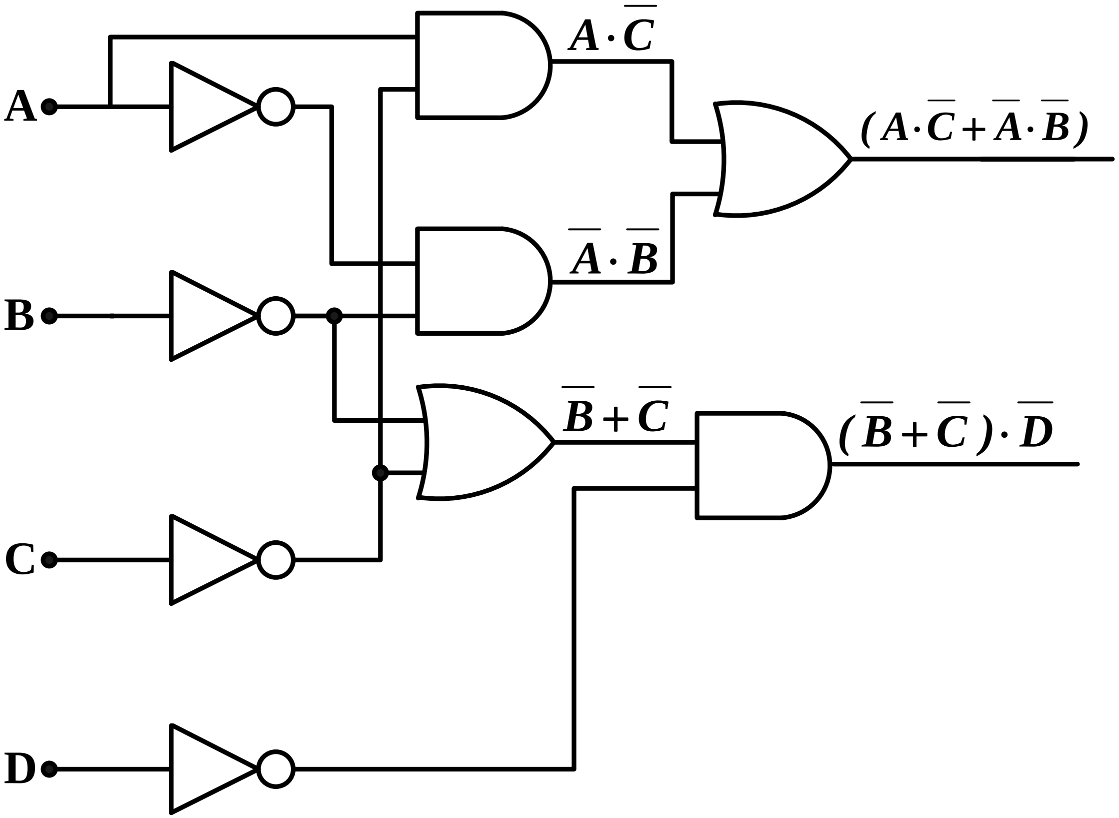
$$f = (A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B})\{[(\overline{B} + \overline{C}) \cdot \overline{D}] + D\}$$



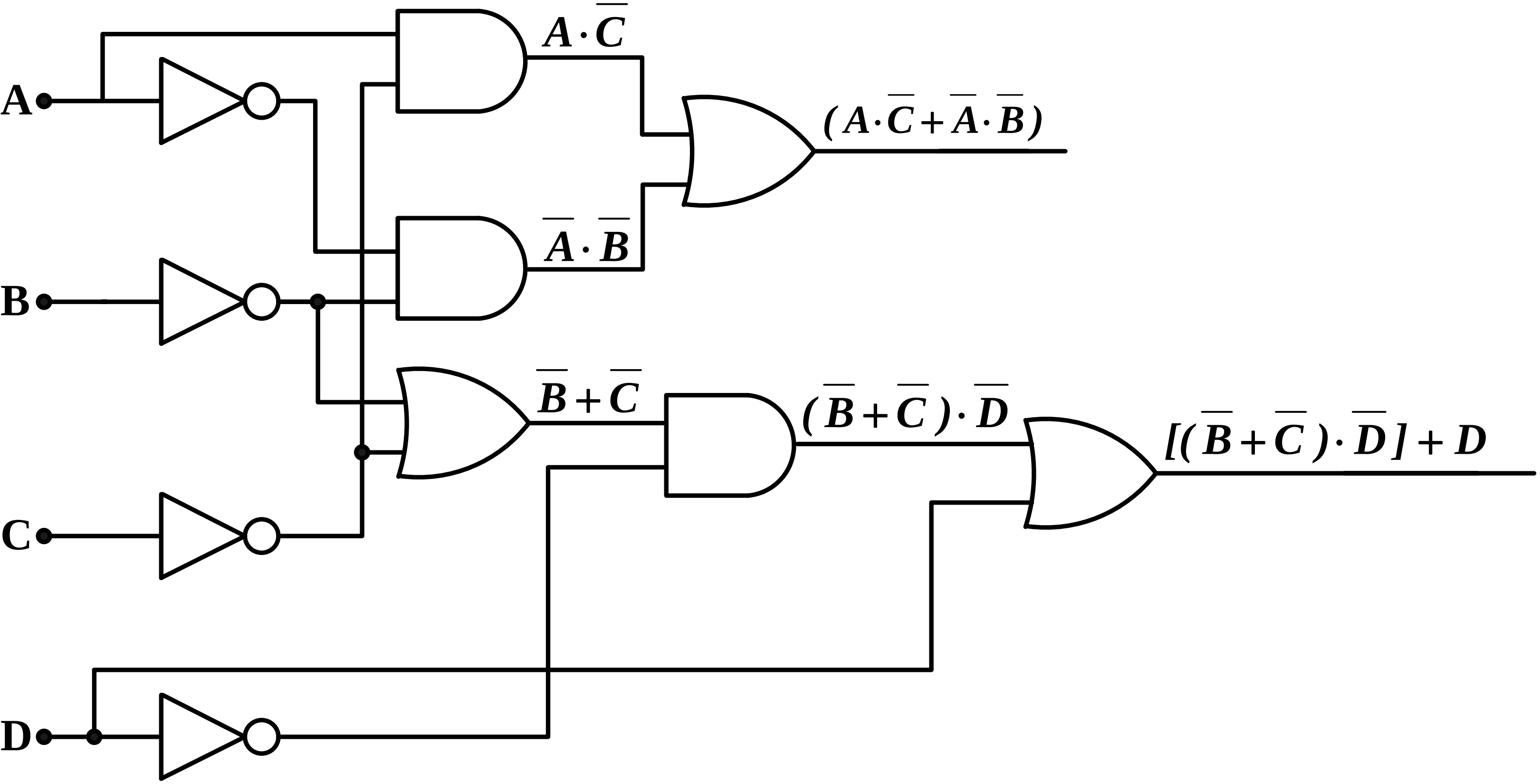
$$f = (A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B})\{[(\overline{B} + \overline{C}) \cdot \overline{D}] + D\}$$



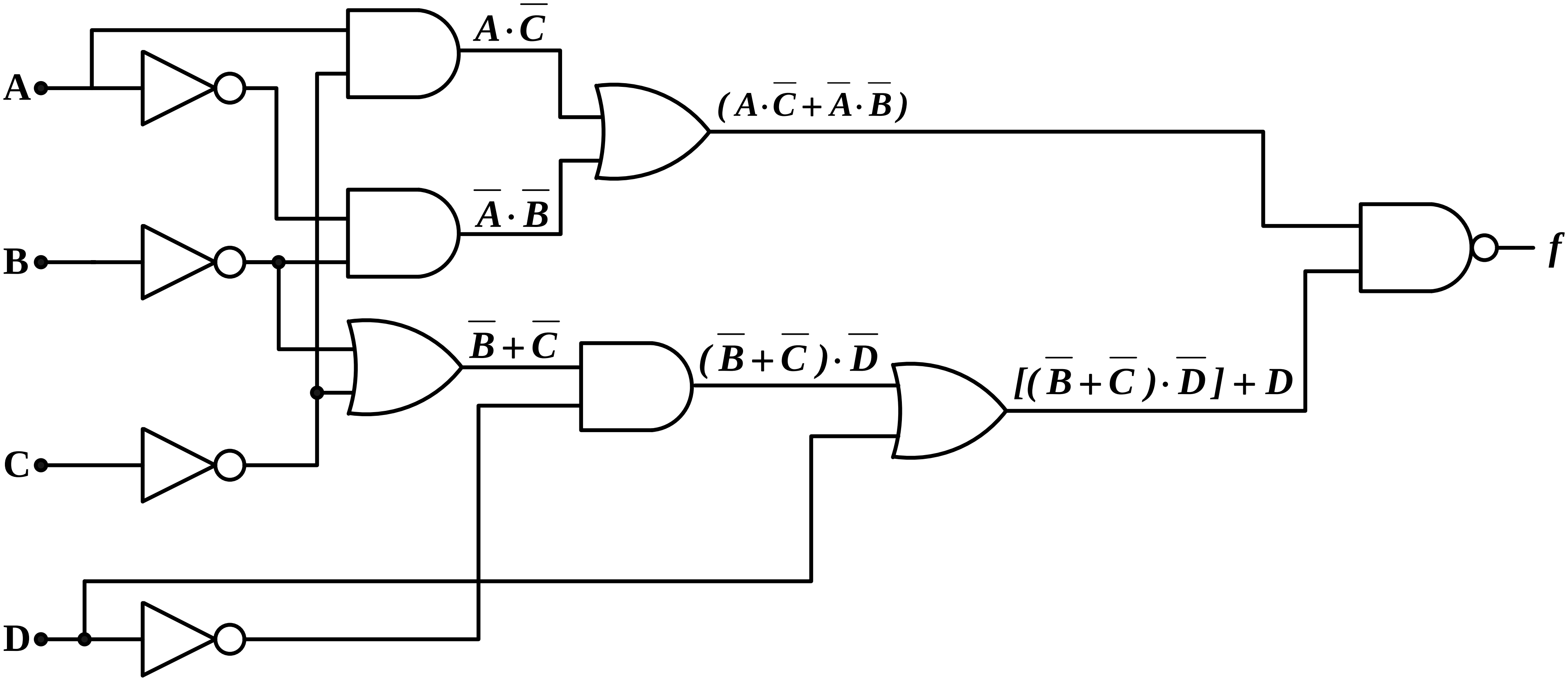
$$f = (\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{C}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})\{[(\overline{\mathrm{B}} + \overline{\mathrm{C}}) \cdot \overline{\mathrm{D}}] + D\}$$



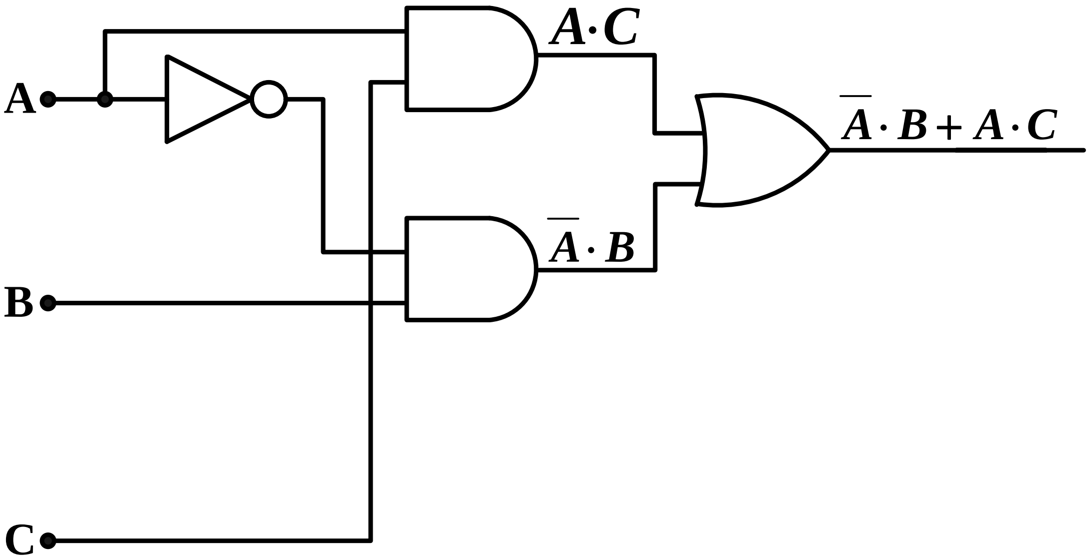
$$f = (A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B})\{[(\overline{B} + \overline{C}) \cdot \overline{D}] + D\}$$

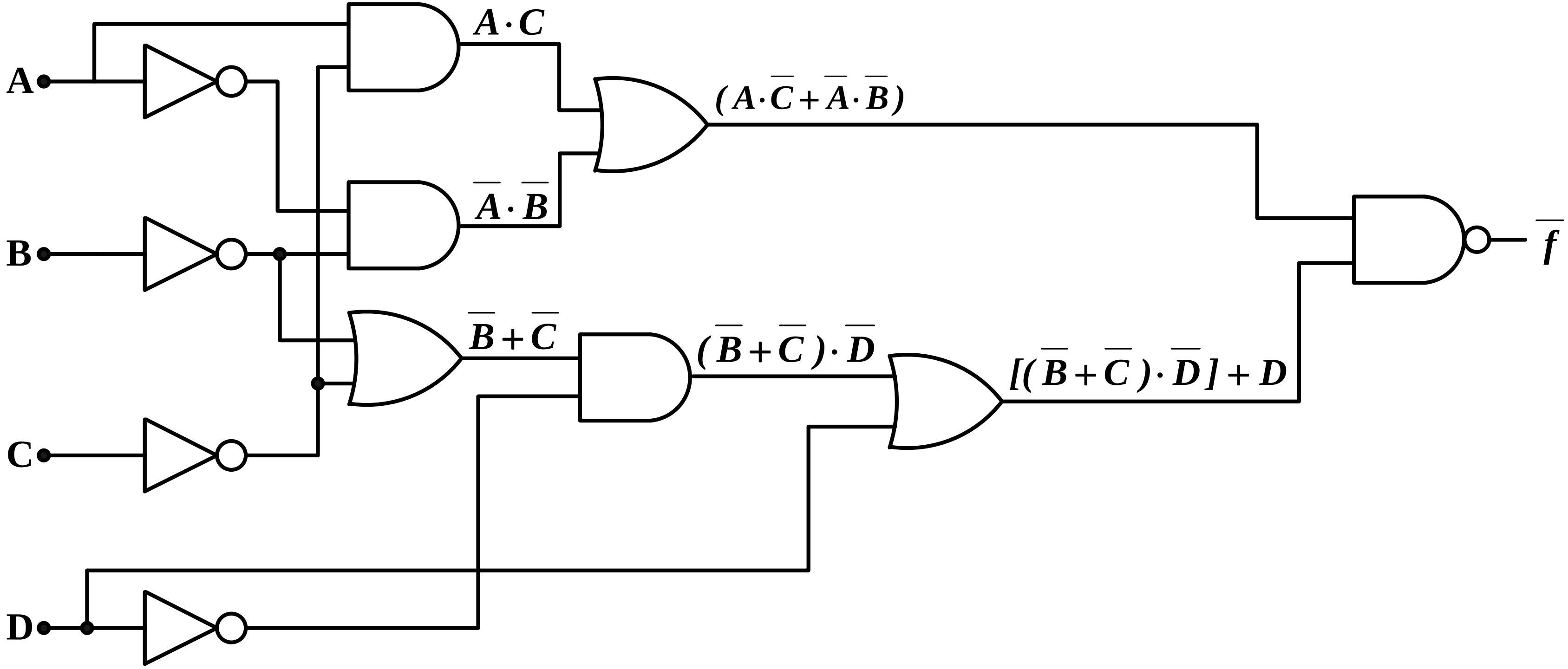


$$\overline{f} = \overline{(A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B})\{[(\overline{B} + \overline{C}) \cdot \overline{D}] + D\}}$$

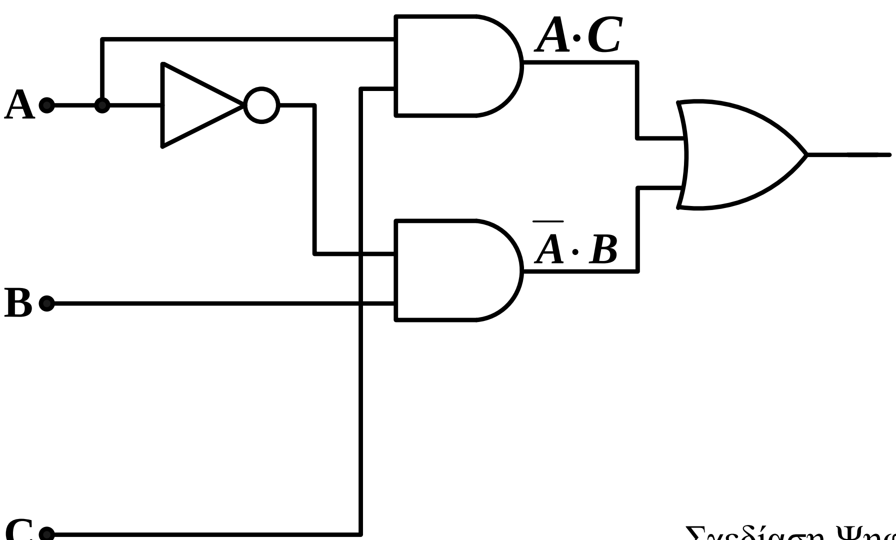


$f_{min} = \overline{A} \cdot B + A \cdot C$





$\equiv$



$$\overline{f}_{min}=\overline{A}\cdot B+A\cdot C$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο της <u>τέλειας επαγωγής</u> και χρήση του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$(A+B)\cdot(A+C)=(A+B\cdot C)$$

A	B	C	(A+B)	(A+C)	BC	(A+B)(A+C)	(A+BC)
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$(A+B)\cdot(A+C)=(A+B\cdot C)$$

A	**B**	**C**	**(A+B)**	**(A+C)**	**BC**	**(A+B)(A+C)**	**(A+BC)**
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$(A+B)\cdot(A+C)=(A+B\cdot C)$$

A	B	C	(A+B)	(A+C)	BC	(A+B)(A+C)	(A+BC)
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	1			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	1			
1	0	0	1	1			
1	0	1	1	1			
1	1	0	1	1			
1	1	1	1	1			

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$(A+B)\cdot(A+C)=(A+B\cdot C)$$

A	B	C	(A+B)	(A+C)	BC	(A+B)(A+C)	(A+BC)
0	0	0	0	0	0		
0	0	1	0	1	0		
0	1	0	1	0	0		
0	1	1	1	1	1		
1	0	0	1	1	0		
1	0	1	1	1	0		
1	1	0	1	1	0		
1	1	1	1	1	1		

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$(A+B)\cdot(A+C)=(A+B\cdot C)$$

A	B	C	(A+B)	(A+C)	BC	(A+B)(A+C)	(A+BC)
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	0	1	
1	0	1	1	1	0	1	
1	1	0	1	1	0	1	
1	1	1	1	1	1	1	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$(A+B)\cdot(A+C)=(A+B\cdot C)$$

A	B	C	(A+B)	(A+C)	BC	(A+B)(A+C)	(A+BC)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$(A+B)\cdot(A+C)=(A+B\cdot C)$$

A	B	C	(A+B)	(A+C)	BC	(A+B)(A+C)	(A+BC)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

A	B	C	$\overline{A}$	AB	BC	$\overline{A}C$	$AB+\overline{A}C+BC$	$AB+\overline{A}C$
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

A	B	C	$\overline{A}$	AB	BC	$\overline{A}C$	$AB + \overline{A}C + BC$	$AB + \overline{A}C$
0	0	0	1					
0	0	1	1					
0	1	0	1					
0	1	1	1					
1	0	0	0					
1	0	1	0					
1	1	0	0					
1	1	1	0					

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

A	B	C	$\overline{A}$	**AB**	BC	$\overline{A}C$	$AB + \overline{A}C + BC$	$AB + \overline{A}C$
0	0	0	1	0				
0	0	1	1	0				
0	1	0	1	0				
0	1	1	1	0				
1	0	0	0	0				
1	0	1	0	0				
1	1	0	0	1				
1	1	1	0	1				

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

A	B	C	$\overline{A}$	AB	BC	$\overline{A}C$	$AB + \overline{A}C + BC$	$AB + \overline{A}C$
0	0	0	1	0	0			
0	0	1	1	0	0			
0	1	0	1	0	0			
0	1	1	1	0	1			
1	0	0	0	0	0			
1	0	1	0	0	0			
1	1	0	0	1	0			
1	1	1	0	1	1			

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

A	B	C	$\overline{A}$	AB	BC	$\overline{A}C$	$AB + \overline{A}C + BC$	$AB + \overline{A}C$
0	0	0	1	0	0	0		
0	0	1	1	0	0	1		
0	1	0	1	0	0	0		
0	1	1	1	0	1	1		
1	0	0	0	0	0	0		
1	0	1	0	0	0	0		
1	1	0	0	1	0	0		
1	1	1	0	1	1	0		

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

A	B	C	$\overline{A}$	AB	BC	$\overline{A}C$	$AB + \overline{A}C + BC$	$AB + \overline{A}C$
0	0	0	1	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	1	1	
0	1	0	1	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	1	0	0	1	
1	1	1	0	1	1	0	1	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

A	B	C	$\overline{A}$	AB	BC	$\overline{A}C$	$AB + \overline{A}C + BC$	$AB + \overline{A}C$
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5

Να αποδειχθεί με τη μέθοδο του πίνακα αληθείας το θεώρημα:

$$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

A	B	C	$\overline{A}$	AB	BC	$\overline{A}C$	$AB + \overline{A}C + BC$	$AB + \overline{A}C$
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Μέγιστοι και ελάχιστοι όροι

Μέγιστος όρος (maxterm) μίας λογικής συνάρτησης, ονομάζεται το λογικό άθροισμα κάθε δυνατού συνδυασμού όλων των μεταβλητών ή των συμπληρωμάτων τους.

Ελάχιστος όρος (minterm) μίας λογικής συνάρτησης, ονομάζεται το λογικό γινόμενο κάθε δυνατού συνδυασμού όλων των μεταβλητών ή των συμπληρωμάτων τους.

Μέγιστοι και ελάχιστοι όροι

Αν μία εξίσωση *f* έχει *ν* μεταβλητές τότε ο αριθμός όλων των μεγίστων ή όλων των ελαχίστων όρων της συνάρτησης θα δίνεται από τη σχέση $N=2^{\nu}$.

			Minterms		Maxterms	
x	***y***	***z***	**Term**	**Designation**	**Term**	**Designation**
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

Αξίζει να σημειωθεί ότι (1) κάθε μεγιστόρος προκύπτει από ένα άθροισμα των ν μεταβλητών, στο οποίο κάθε μεταβλητή είναι στην κανονική της μορφή, εάν το αντίστοιχο bit του αντίστοιχου δυαδικού αριθμού είναι 0, ή στη συμπληρωμένη μορφή της εάν το bit αυτό είναι 1, και (2) κάθε μεγιστόρος είναι το συμπλήρωμα του αντίστοιχου ελαχιστόρου και αντιστρόφως.

Κάθε ελάχιστος όρος είναι το συμπλήρωμα ενός μεγίστου και αντιστρόφως.

Έτσι,

$$\overline{\overline{A}+\overline{B}} = \overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}} = A\cdot B$$

$$\overline{\overline{A}+B} = \overline{\overline{A}}\cdot\overline{B} = A\cdot\overline{B}$$

$$\overline{A+\overline{B}} = \overline{A}\cdot\overline{\overline{B}} = \overline{A}\cdot B$$

$$\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$$

Κάθε ελάχιστος όρος είναι το συμπλήρωμα ενός μεγίστου και αντιστρόφως.

και

$$\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = A + B$$

$$\overline{\overline{A}\cdot B} = \overline{\overline{A}} + \overline{B} = A + \overline{B}$$

$$\overline{A\cdot\overline{B}} = \overline{A} + \overline{\overline{B}} = \overline{A} + B$$

$$\overline{A\cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Το λογικό άθροισμα όλων των ελαχίστων όρων μίας συνάρτησης ισούται με 1.

$$f = \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B} + A\cdot B = 1$$

Απόδειξη:

$$f = \overline{A}\cdot(B+\overline{B}) + A\cdot(B+\overline{B}) = \overline{A}\cdot 1 + A\cdot 1 = \overline{A} + A = 1$$

Το λογικό γινόμενο όλων των μεγίστων όρων μίας συνάρτησης ισούται με 0.

$$f = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B}) \cdot (A + B) = 0$$

Απόδειξη:

$$f = (\overline{A} \cdot \overline{A} + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{B} \cdot B) \cdot (A \cdot A + A \cdot B + A \cdot \overline{B} + \overline{B} \cdot B)$$

$$= (\overline{A} + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot (A + A \cdot B + A \cdot \overline{B})$$

$$= [(1 + B + \overline{B}) \cdot \overline{A}] \cdot [(1 + B + \overline{B}) \cdot A]$$

$$= (\overline{A} \cdot 1) \cdot (A \cdot 1) = A \cdot \overline{A} = 0$$

Κανονική μορφή συνάρτησης

Μία λογική συνάρτηση λέγεται ότι είναι σε κανονική μορφή όταν η συνάρτηση είναι σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων ή γινομένου μεγίστων όρων.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες,

$$\overline{A}\cdot A = 0,\ \overline{A} + A = 1 \text{ και } A + A = A$$

της άλγεβρας Boole ο Shanon απέδειξε ότι κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να μετασχηματιστεί σε άθροισμα ελαχίστων όρων ή σε γινόμενο μεγίστων όρων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7

Να μετατραπεί σε μορφή αθροίσματος γινομένων ελαχίστων όρων και γινομένου μεγίστων όρων η συνάρτηση: $\boldsymbol{f = A \cdot (\overline{B} + \overline{C})}$

$$f = A \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = \mathrm{A}\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{A}\overline{C} = \mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}(C + \overline{C}) + \mathrm{A}\overline{C}(B + \overline{B})$$

$$= \mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}C + \mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\,\overline{C} + \mathrm{A}B\overline{C} + \mathrm{A}\overline{B}\,\overline{C} = 101 + 100 + 110 + 100 = \sum(4,5,6)$$

$$f = \boxed{A \cdot}\boxed{(\overline{B} + \overline{C})}$$

$$= (A + \boxed{B \cdot \overline{B} + C \cdot \overline{C}}) \cdot (\boxed{A \cdot \overline{A}} + \overline{B} + \overline{C})$$

T5 T5

$$= \boxed{(A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + C) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (A + B + C)} \cdot \boxed{(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C})}$$

T8 T8

$$= \underset{011}{(A + \overline{B} + \overline{C})} \cdot \underset{010}{(A + \overline{B} + C)} \cdot \underset{001}{(A + B + \overline{C})} \cdot \underset{000}{(A + B + C)} \cdot \underset{111}{(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})}$$

$$= \Pi(0,1,2,3,7)$$

Επαλήθευση της 2.7 με τέλεια επαγωγή και πίνακα αλήθειας:

	A	B	C	A	(B’+C’)	f
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	0	0

Ελαχιστόροι

Μεγιστόροι

$f = \Sigma(4,5,6) = m_4 + m_5 + m_6$

$f = \Pi(0,1,2,3,7) = M_0 M_1 M_2 M_3 M_7$

Αν μία συνάρτηση *f* είναι λογικό άθροισμα ελαχίστων όρων, <u>τότε η συμπληρωματική της</u> θα είναι το λογικό γινόμενο των μεγίστων όρων της ίδιας συνάρτησης.

Αν πάλι μία συνάρτηση *f* είναι λογικό γινόμενο μεγίστων όρων, <u>τότε η συμπληρωματική</u> της θα είναι το λογικό άθροισμα των ελαχίστων όρων της ίδιας συνάρτησης.

ΠΙΣΩ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.6

Να παρθεί σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων η λογική συνάρτηση

$$f = A\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot D + B\cdot C + C\cdot D$$

$$f = A\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot D + B\cdot C + C\cdot D$$

$$= A\cdot B\cdot C\cdot(D+\overline{D}) + A\cdot B\cdot D\cdot(C+\overline{C}) + B\cdot C\cdot(A+\overline{A})\cdot(D+\overline{D}) + C\cdot D\cdot(A+\overline{A})\cdot(B+\overline{B})$$

$$= A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D +$$

$$+(A\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot C)\cdot(D+\overline{D}) + (A\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot C\cdot D)\cdot(B+\overline{B})$$

$$= A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} +$$

$$+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$$

$$= A\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$$

$$= 1111 + 1110 + 1101 + 0111 + 0110 + 1011 + 0011$$

$$= 15 + 14 + 13 + 7 + 6 + 11 + 3 = \Sigma(3,6,7,11,13,14,15)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.8 (νέα)

Να παρθεί το γινόμενο μεγίστων όρων της συνάρτησης του παραδείγματος 2.6 $f = A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot D + B \cdot C + C \cdot D$

$$f = \Sigma(3,6,7,11,13,14,15)$$

$$\overline{f} = \Sigma(0,1,2,4,5,8,9,10,12)$$

$$= m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{12}$$

$$\overline{\overline{f}} = \overline{m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{12}}$$

$$= {m_0}' \cdot {m_1}' \cdot {m_2}' \cdot {m_4}' \cdot {m_5}' \cdot {m_8}' \cdot {m_9}' \cdot {m_{10}}' \cdot {m_{12}}'$$

$$= \mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{M}_1 \cdot \mathrm{M}_2 \cdot \mathrm{M}_4 \cdot \mathrm{M}_5 \cdot \mathrm{M}_8 \cdot \mathrm{M}_9 \cdot \mathrm{M}_{10} \cdot \mathrm{M}_{12}$$

$$= \prod(0,1,2,4,5,8,9,10,12)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.10 (νέα)

Να μετατραπεί σε γινόμενο μεγίστων όρων η λογική συνάρτηση $f = (\overline{A} + B + \overline{C})(B + \overline{D})(\overline{A} + \overline{B} + D)$

A	B	C	D	A'	B'	C'	D'	A' + B + C'	B + D'	A' + B' + D	f
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0

$f = \Pi(1,3,5,7,9,11,12,13,15)$