ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Διακριτά Μαθηματικά

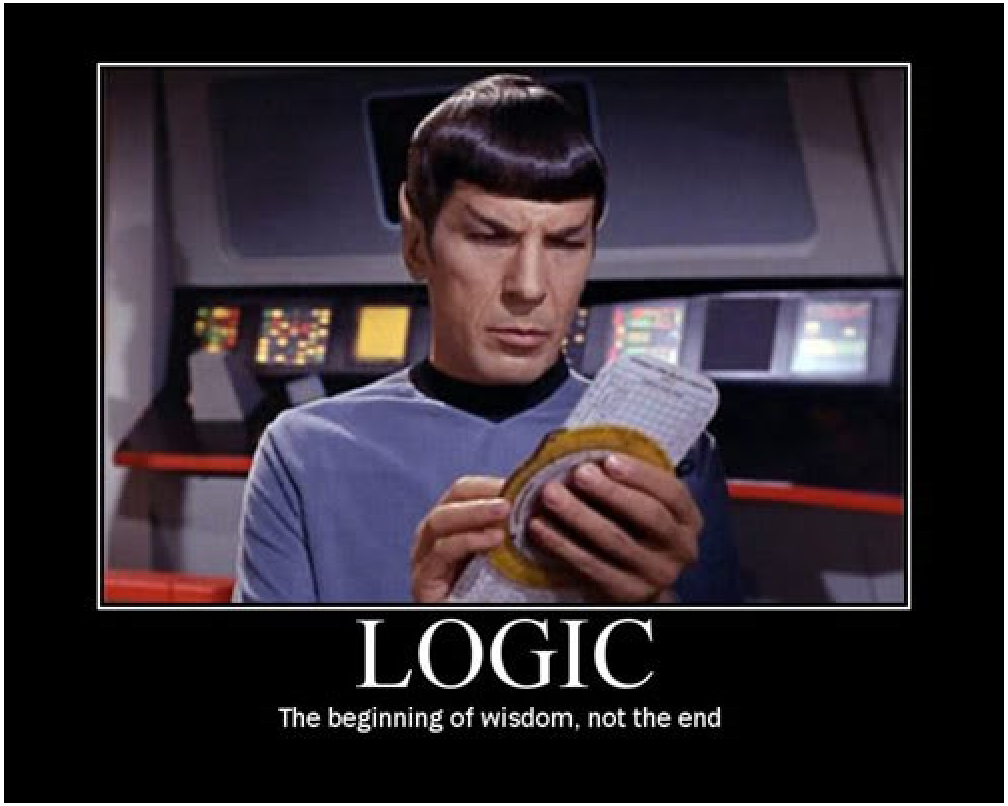
Προτασιακή Λογική

Δρ. Θωμάς Λάγκας

Επισκόπηση

- Προτάσεις
  - Τιμές Αληθείας
  - Λογικοί τελεστές
  - Πίνακες αληθείας
  - Ικανοποιησιμότητα
- Εφαρμογές της Προτασιακής Λογικής
  - Μετάφραση φυσικής γλώσσας
  - Προδιαγραφές συστήματος
  - Λογικά κυκλώματα
- Λογική Ισοδυναμία και Αιτιολόγηση
  - Σημαντικές ισοδυναμίες
  - Απόδειξη ισοδυναμίας
  - Κανόνες συνεπαγωγής
  - Επιχειρηματολογία

Μέρος Ι: Προτάσεις



Προτάσεις

- Μια πρόταση είναι μια δήλωση που είναι είτε αληθής (true) ή ψευδής (false) {**Α (Τ)** ή **Ψ** (**F**) – συχνά θα χρησιμοποιούμε τα διεθνή λατινικά σύμβολα}
- Προτάσεις:
  - Το φεγγάρι είναι φτιαγμένο από τυρί.
  - Η Αθήνα είναι η πρωτεύουσα της Ελλάδος.
  - Το Λονδίνο είναι η μεγαλύτερη πόλη του Η.Β.
  - $1 + 0 = 1$
  - $0 + 0 = 2$

- Δηλώσεις που δεν είναι προτάσεις:
  - Κάτσε κάτω!
  - Είσαι σίγουρος?
  - $\mathrm{x} + 0 = 1$
  - $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 2$

Προτάσεις

- Οι προτάσεις συμβολίζονται με προτασιακές μεταβλητές – π.χ. $p, q, r, s, \ldots$
- Δόμηση προτάσεων
  - Οι σύνθετες προτάσεις δομούνται με τη χρήση **λογικών τελεστών (συνδετικών)** και πιθανώς άλλων προτάσεων
  - Λογικοί τελεστές:
    - Άρνηση
    - Σύζευξη
    - Διάζευξη
    - Συνεπαγωγή
    - Ισοδυναμία (ή διπλή συνεπαγωγή)

Τελεστές – Άρνηση

- Η άρνηση αποτελεί μοναδιαία πράξη
- Η άρνηση της πρότασης p συμβολίζεται με $\neg p$ (υπάρχουν και άλλοι συμβολισμοί)
- Αν το p σημαίνει *"Η Γη είναι ορθογώνια"* τότε το $\neg p$ σημαίνει *"Δεν ισχύει ότι η Γη είναι ορθογώνια"* ή πιο απλά *"Η Γη δεν είναι ορθογώνια"*
- Η Άρνηση έχει τον ακόλουθο πίνακα αληθείας

p	$\neg p$
T	F
F	T

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Τελεστές – Σύζευξη

- Η σύζευξη αποτελεί δυαδική πράξη
- Η σύζευξη των προτάσεων $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$
- Αν $\boldsymbol{p}$ σημαίνει "*Η Γη είναι ορθογώνια*" και $\boldsymbol{q}$ σημαίνει "*Το φεγγάρι είναι σφαιρικό*" τότε $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ σημαίνει "*Η Γη είναι ορθογώνια και το φεγγάρι είναι σφαιρικό*"
- Η σύζευξη έχει τον ακόλουθο πίνακα αληθείας

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- Σημειογραφία (γενικευμένη σύζευξη): $\bigwedge_{i=1}^{n} p_i = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Τελεστές – Διάζευξη

- Η διάζευξη αποτελεί δυαδική πράξη
- Η διάζευξη των προτάσεων $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$
- Αν $\boldsymbol{p}$ σημαίνει "*Η Γη είναι ορθογώνια*" και $\boldsymbol{q}$ σημαίνει "*Το φεγγάρι είναι σφαιρικό*" τότε $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ σημαίνει "*Η Γη είναι ορθογώνια ή το φεγγάρι είναι σφαιρικό*"
- Η διάζευξη έχει τον ακόλουθο πίνακα αληθείας

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Σημειογραφία (γενικευμένη διάζευξη): $\bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Τελεστές – Διάζευξη

- Ο τελεστής "ή" στα Ελληνικά (και σε άλλες γλώσσες) μπορεί να έχει δύο διαφορετικές σημασίες
  - "*Μη-Αποκλειστικό Ή*" – η σημασία του "ή" είναι σε αυτή την περίπτωση η ίδια με αυτή που περιεγράφηκε στην προηγούμενη διαφάνεια: για κάθε δύο προτάσεις p και q, το "p ή q" είναι αληθές όταν τουλάχιστον ένα από τα p, q είναι αληθές
  - "*Αποκλειστικό Ή* (*Xor*)" – "ή" τώρα αποκτά διαφορετικό νόημα: για κάθε δύο προτάσεις p και q, το "p ή q" είναι αληθές όταν ακριβώς ένα από τα p ή q είναι αληθή (αλλά όχι και τα δύο)
    - Το Xor συχνά συμβολίζεται ως $p \oplus q$ που αποτελεί σύντμηση της πρότασης $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
    - Πίνακας αληθείας:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Η συνεπαγωγή είναι δυαδική πράξη
- Δεδομένων των προτάσεων p και q, η συνεπαγωγή, που συμβολίζεται ως $p \Rightarrow q$, είναι η υπό συνθήκη δήλωση που διαβάζεται ως "αν p τότε q"
- Αν p σημαίνει "*Ψιχαλίζει*" and q σημαίνει "Ο ουρανός είναι συννεφιασμένος" τότε $p \Rightarrow q$ σημαίνει "*Αν ψιχαλίζει τότε ο ουρανός είναι συννεφιασμένος*"
- Αν p σημαίνει "*Ο επεξεργαστής είναι αργός*" and q σημαίνει "*Η εφαρμογή δεν αποκρίνεται*" τότε $p \Rightarrow q$ σημαίνει "*Αν ο επεξεργαστής είναι αργός τότε η εφαρμογή δεν αποκρίνεται*"
- Ορολογία: Στο $p \Rightarrow q$, το p είναι η υπόθεση και q είναι το συμπέρασμα

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Πίνακας αληθείας:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

<u>Σημείωση</u>: Αυτό μπορεί να σας εκπλήξει!

- Ένας τρόπος για να δει κανείς τη συνεπαγωγή είναι να τη θεωρήσει ως υποχρέωση ή συμβόλαιο
- Αν $\boldsymbol{p}$ σημαίνει “*Ο Γιάννης εκλέγεται*” και $\boldsymbol{q}$ σημαίνει “*οι φόροι μειώνονται*” τότε $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ σημαίνει “*Αν ο Γιάννης εκλεγεί τότε οι φόροι θα μειωθούν*”
    - Υπό ποιες συνθήκες το $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ είναι ψευδές?

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Πίνακας αληθείας:

“ο Γιάννης εκλέγεται”	*“οι φόροι μειώνονται”*	*“ο Γιάννης εκλέγεται” ⇒ “οι φόροι μειώνονται”*
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Αν ο Γιάννης εκλεγεί και οι φόροι δεν μειωθούν, τότε μπορούμε να αποφανθούμε ότι η υποχρέωση ή το συμβόλαιο που προκύπτει από τη συνεπαγωγή δεν επαληθεύεται – δηλαδή η συνεπαγωγή είναι ψευδής
- Ωστόσο, η κατάσταση είναι διαφορετική για τις ακόλουθες πιθανές περιπτώσεις:

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Πίνακας αληθείας:

“ο Γιάννης εκλέγεται”	*“οι φόροι μειώνονται”*	*“ο Γιάννης εκλέγεται”* ⇒ *“οι φόροι μειώνονται”*
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Αν ο Γιάννης εκλεγεί και οι φόροι μειωθούν, τότε μπορούμε να αποφανθούμε ότι η υποχρέωση ή το συμβόλαιο που προκύπτει από τη συνεπαγωγή επαληθεύεται – δηλαδή η συνεπαγωγή είναι αληθής

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Πίνακας αληθείας:

"ο Γιάννης εκλέγεται"	*"οι φόροι μειώνονται"*	*"ο Γιάννης εκλέγεται" ⇒ "οι φόροι μειώνονται"*
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Αν ο Γιάννης δεν εκλεγεί και οι φόροι μειωθούν, τότε μπορούμε να αποφανθούμε ότι η υποχρέωση ή το συμβόλαιο που προκύπτει από τη συνεπαγωγή επαληθεύεται – δηλαδή η συνεπαγωγή είναι (κατά προεπιλογή) αληθής
  - Αυτό ισχύει διότι το συμβόλαιο απαιτεί να ισχύει η υπόθεση της συνεπαγωγής
  - Δεν αφορά σε περιπτώσεις όπου η υπόθεση δεν είναι αληθής
    - Σε τέτοιες περιπτώσεις, η συνεπαγωγή θεωρείται αληθής «κατά προεπιλογή»

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Πίνακας αληθείας :

“ο Γιάννης εκλέγεται”	*“οι φόροι μειώνονται”*	*“ο Γιάννης εκλέγεται” ⇒ “οι φόροι μειώνονται”*
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Αν ο Γιάννης δεν εκλεγεί και οι φόροι δεν μειωθούν, τότε μπορούμε να αποφανθούμε ότι η υποχρέωση ή το συμβόλαιο που προκύπτει από τη συνεπαγωγή επαληθεύεται – δηλαδή η συνεπαγωγή είναι (κατά προεπιλογή) αληθής
  - Αυτό ισχύει διότι το συμβόλαιο προϋποθέτει ότι η υπόθεση της συνεπαγωγής ισχύει

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Αν p σημαίνει *“ο Γιώργος παίρνει πάνω από 9”* και q σημαίνει *“ο Γιώργος παίρνει άριστα”* τότε $p \Rightarrow q$ σημαίνει *“Αν ο Γιώργος παίρνει πάνω από 9 τότε ο Γιώργος παίρνει άριστα”*
  - Πίνακας αληθείας:

“ο Γιώργος παίρνει πάνω από 9”	*“ο Γιώργος παίρνει άριστα”*	*“ο Γιώργος παίρνει πάνω από 9”* $\Rightarrow$ *“ο Γιώργος παίρνει άριστα”*
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

  - Αν ο Γιώργος παίρνει πάνω από 9 και ο Γιώργος δεν παίρνει άριστα, τότε προφανώς η συνεπαγωγή εκφράζει κάτι ψευδές

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Πίνακας αληθείας:

“ο Γιώργος παίρνει πάνω από 9”	*“ο Γιώργος παίρνει άριστα”*	*“ο Γιώργος παίρνει πάνω από 9”* $\Rightarrow$ *“ο Γιώργος παίρνει άριστα”*
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Αν ο Γιώργος παίρνει 9 και ο Γιώργος παίρνει άριστα, τότε προφανώς η συνεπαγωγή είναι αληθής

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Truth table:

“ο Γιώργος παίρνει πάνω από 9”	“ο Γιώργος παίρνει άριστα”	“ο Γιώργος παίρνει πάνω από 9” ⇒ “ο Γιώργος παίρνει άριστα”
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Αν ο Γιώργος δεν παίρνει 9, τότε η εγκυρότητα της συνεπαγωγής δεν μπορεί να επαληθευτεί – όλα τα πιθανά αποτελέσματα είναι αποδεκτά:
  - Ο Γιώργος μπορεί ακόμα να πάρει άριστα, εφόσον βαθμολογηθεί με πάνω από 8,5 ($3^{η}$ γραμμή στον πίνακα αληθείας)
  - Ο Γιώργος μπορεί να μην πάρει άριστα, εφόσον βαθμολογηθεί 8,5 και κάτω ($4^{η}$ γραμμή στον πίνακα αληθείας)

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Ορολογία: Διαφορετικοί τρόποι έκφρασης του $p \Rightarrow q$
  - p συνεπάγεται q
  - αν p τότε q
  - p μόνο εάν q
  - αν p, q
  - q αν p
  - q όποτε p
  - q ακολουθεί από p
  - μια ικανή συνθήκη για q είναι p
  - μια αναγκαία συνθήκη για p είναι q

Τελεστές – Συνεπαγωγή

- Ανάστροφη, αντιθετοαντίστροφη και αντίστροφη της $p \Rightarrow q$
  - $q \Rightarrow p$ είναι ανάστροφη της $p \Rightarrow q$
  - $\neg q \Rightarrow \neg p$ είναι αντιθετοαντίστροφη της $p \Rightarrow q$
  - $\neg p \Rightarrow \neg q$ είναι αντίστροφη της $p \Rightarrow q$
- *“Μια ικανή συνθήκη για μένα να μην πάω στο κέντρο είναι να βρέχει”*
  - Ανάστροφη: *“Αν δεν πάω στο κέντρο τότε βρέχει”*
  - Αντιθετοαντίστροφη: *“Αν πάω στο κέντρο τότε δεν βρέχει*
  - Αντίστροφη: *“Αν δεν βρέχει τότε πάω στο κέντρο”*

<u>Σημείωση</u>: Εδώ χρησιμοποιείται ο κανόνας της διπλής άρνησης, που θα δούμε και αργότερα

Τελεστές – Ισοδυναμία

- Η ισοδυναμία είναι δυαδική πράξη
- Δεδομένων των προτάσεων p και q η ισοδυναμία που συμβολίζεται ως $p \Leftrightarrow q$ είναι η συνθήκη διπλής υπόθεσης που διαβάζεται ως "p εάν και μόνο εάν q"
  - Το "εάν και μόνο εάν" συχνά συντομεύεται ως iff (εκ του "if and only if")
- Δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες όταν έχουν ακριβώς τις ίδιες τιμές αληθείας
- Πίνακας αληθείας:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Τελεστές – Ισοδυναμία

- Αν p σημαίνει "*Ο Κώστας διαβάζει συνέχεια*" και q σημαίνει "*Ο Κώστας είναι έξυπνος*" τότε $p \Leftrightarrow q$ σημαίνει "*Ο Κώστας διαβάζει συνέχεια εάν και μόνο εάν είναι έξυπνος*"
  - Παρατηρήστε ότι οι δύο προτάσεις είναι ανταλλάξιμες
- Επίσης,, σημειώστε ότι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες, όταν η μία συνεπάγεται την άλλη
  - $p \Leftrightarrow q$ είναι ισοδύναμη με $\underbrace{(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)}$

Οι παρενθέσεις πραγματικά χρειάζονται (βλ. επόμενη διαφάνεια)

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Τελεστές – Προτεραιότητα Πράξεων

Τελεστής	Προτεραιότητα
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\Rightarrow$	4
$\Leftrightarrow$	5

- Για παράδειγμα, $p \vee q \Rightarrow r$ είναι ισοδύναμο με $(p \vee q) \Rightarrow r$
  - Σημειώστε ότι αν το επιθυμητό νόημα είναι $p \vee (q \Rightarrow r)$ τότε οι παρενθέσεις είναι απαραίτητες

Υπολογισμός Σύνθετων Προτάσεων

- Θεωρήστε τη σύνθετη πρόταση $p \vee q \Rightarrow \neg r$
  - Πίνακας αληθείας

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \Rightarrow \neg r$
T	T	T	F	T	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

Υπολογισμός Σύνθετων Προτάσεων

- Παρατηρήστε ότι ο πίνακας αληθείας περιλαμβάνει:
  - Μια στήλη για κάθε πρόταση που εμφανίζεται εντός της σύνθετης πρότασης
  - Μια στήλη για την ίδια τη σύνθετη πρόταση (συνήθως η τελευταία στήλη)
  - Μια γραμμή για κάθε συνδυασμό τιμών αληθείας των θεμελιωδών (ή ατομικών) προτάσεων που εμφανίζονται εντός της σύνθετης πρότασης
    - Αυτό σημαίνει ότι εάν η σύνθετη πρόταση περιλαμβάνει n διαφορετικές ατομικές προτάσεις, ο πίνακας αληθείας αποτελείται από 2^n γραμμές
    - Για παράδειγμα, στην περίπτωση της προηγούμενης διαφάνειας, η σύνθετη πρόταση περιλαμβάνει 3 ατομικές προτάσεις κι έτσι ο πίνακας αληθείας αποτελείται από $2^3 = 8$ γραμμές

Ταυτολογία, Αντίφαση, Ενδεχόμενο

- Ταυτολογία – μία (σύνθετη) πρόταση είναι πάντα αληθής ασχέτως από τις τιμές των επιμέρους ατομικών προτάσεων
  - E.g. $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

- Αντίφαση – μία (σύνθετη) πρόταση είναι πάντα ψευδής ασχέτως από τις τιμές των επιμέρους ατομικών προτάσεων
  - E.g. $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

- Ενδεχόμενο – κάθε πρόταση δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση

Προτασιακή Ικανοποιησιμότητα

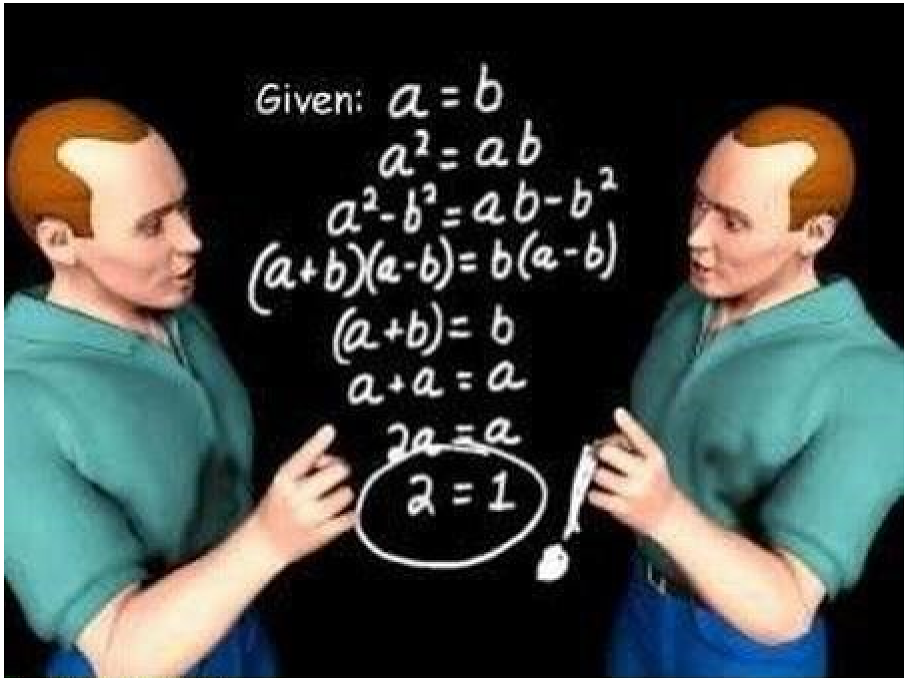
- Μια σύνθετη πρόταση είναι *ικανοποιήσιμη* εάν και μόνο εάν δεν αποτελεί αντίφαση
  - Με άλλα λόγια,
    - Είναι είτε ταυτολογία είτε ενδεχόμενο
    - Υπάρχει τουλάχιστον μια ανάθεση τιμών αληθείας στις επιμέρους ατομικές προτάσεις που καθιστά τη σύνθετη πρόταση αληθή
- Μια σύνθετη πρόταση είναι *μη-ικανοποιήσιμη* εάν και μόνο εάν αποτελεί αντίφαση
- Π.χ. Προσδιορίστε την ικανοποιησιμότητα του $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
  - <u>Λύση</u>:
    - Σχεδιάστε τον πίνακα αληθείας για τη σύνθετη πρόταση
    - Ελέγξτε τη στήλη που εμφανίζει τις τιμές αληθείας ολόκληρης της σύνθετης πρότασης
    - Αν περιλαμβάνει τουλάχιστον μια τιμή T, η σύνθετη πρόταση είναι ικανοποιήσιμη, διαφορετικά όχι

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Προτασιακή Ικανοποιησιμότητα

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \vee \neg q$	$q \vee \neg r$	$r \vee \neg p$	$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
T	T	T	F	F	F	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T	F	F
T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	T	T	T	F	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	T	T	T	T

Μέρος ΙΙ: Εφαρμογές της Προτασιακής Λογικής



ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Εφαρμογές της Προτασιακής Λογικής

- Μετάφραση κειμένου σε προτασιακή λογική
  - Βήματα για την μετάφραση κειμένου σε δήλωση προτασιακής λογικής
    - Προσδιορίστε τις ατομικές προτάσεις και αναπαραστήστε τες με προτασιακές μεταβλητές
    - Προσδιορίστε τους λογικούς τελεστές που συνδέουν τις ατομικές προτάσεις
  - *"Αν πάω στο σπίτι του Δημήτρη ή πάω εκδρομή, τότε δεν θα πάω κινηματογράφο."*
    - Προσδιορισμός ατομικών προτάσεων:

p	Πάω στο σπίτι του Δημήτρη
q	Πάω εκδρομή
r	Πάω κινηματογράφο

    - Προσδιορισμός τελεστών και διαμόρφωση προτασιακής δήλωσης:

$$(p \vee q) \Rightarrow \neg r$$

Εφαρμογές της Προτασιακής Λογικής

- Μετάφραση κειμένου σε προτασιακή λογική
  - *"Μπορείς να έχεις πρόσβαση στο WiFi της Σχολής μόνο εάν ανήκεις στο Τμήμα Πληροφορικής ή δεν είσαι πρωτοετής."*
    - Προσδιορισμός ατομικών προτάσεων:

p	Μπορείς να έχεις πρόσβαση στο WiFi της Σχολής
q	Ανήκεις στο Τμήμα Πληροφορικής
r	Είσαι πρωτοετής

    - Προσδιορισμός τελεστών και διαμόρφωση προτασιακής δήλωσης:

$$p \Rightarrow (q \vee \neg r)$$

Εφαρμογές της Προτασιακής Λογικής

- Προδιαγραφές συστήματος
  - Αλλά γιατί ενδιαφερόμαστε για τη μετάφραση φυσικής γλώσσας σε Προτασιακή Λογική;
  - Η φυσική γλώσσα είναι συχνά ασαφής
    - Σκεφτείτε, για παράδειγμα, το τελεστή "ή" – δεν είναι πάντα ξεκάθαρο αν φέρει το νόημα του αποκλειστικού ή μη-αποκλειστικού "ή"
  - Αυτή η ασάφεια μπορεί να αποδειχθεί δαπανηρή όταν πρόκειται για τις προδιαγραφές ενός πολύπλοκου συστήματος (λογισμικού)
    - Με την εσφαλμένη μετάφραση των προδιαγραφών συστήματος που εκφράζονται σε φυσική γλώσσα, μπορεί να καταλήξουμε με το λάθος σύστημα…
  - Η μετάφραση σε Προτασιακή Λογική αποτελεί τρόπο για την αντιμετώπιση αυτής της ασάφειας
    - Επίσης, παρέχει την ευκαιρία για την εφαρμογή εργαλείων αυτόματης επαλήθευσης που ελέγχουν ένα σύνολο δηλώσεων (που μπορεί να σχηματίζουν μέρος των προδιαγραφών συστήματος) για ασυνέπειες και αντιφάσεις

Εφαρμογές της Προτασιακής Λογικής

- Προδιαγραφές συστήματος
  - Ένα σύνολο (σύνθετων) προτάσεων (που πιθανώς μοιράζονται κοινές μεταβλητές) είναι συνεπές εάν και μόνο εάν είναι εφικτό να αναθέσουμε τιμές αληθείας στις προτασιακές μεταβλητές του, έτσι ώστε κάθε (σύνθετη) πρόταση να είναι αληθής
  - Με άλλα λόγια, ένα σύνολο (σύνθετων) προτάσεων είναι συνεπές εάν και μόνο εάν η σύζευξή τους δεν αποτελεί αντίφαση
  - Προσδιορίστε αν οι ακόλουθες προτάσεις (που μπορεί να σχηματίζουν προδιαγραφές συστήματος) είναι συνεπές:

    "Το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στη μνήμη ή αναμεταδίδεται."

    "Το διαγνωστικό μήνυμα δεν αποθηκεύεται στη μνήμη."

    "Εάν το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στη μνήμη, τότε αναμεταδίδεται."

    – Αναγνώριση ατομικών προτάσεων:

p	Το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στη μνήμη
q	Το διαγνωστικό μήνυμα αναμεταδίδεται

Εφαρμογές της Προτασιακής Λογικής

- Προδιαγραφές συστήματος
  - Προσδιορισμός τελεστών και προτασιακών δηλώσεων:

Το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στη μνήμη ή αναμεταδίδεται	$p \vee q$
Το διαγνωστικό μήνυμα δεν αποθηκεύεται στη μνήμη	$\neg p$
Εάν το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στη μνήμη, τότε αναμεταδίδεται	$p \Rightarrow q$

  - Πίνακας αληθείας:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$(p \vee q) \wedge \neg p \wedge (p \Rightarrow q)$
T	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F

<u>Σημείωση</u>: Αυτό δεν αποτελεί αντίφαση κι έτσι οι προτάσεις είναι συνεπείς

Εφαρμογές της Προτασιακής Λογικής

- Προδιαγραφές συστήματος
  - Υποθέστε τώρα ότι προστίθεται ακόμα μία δήλωση στις προδιαγραφές:

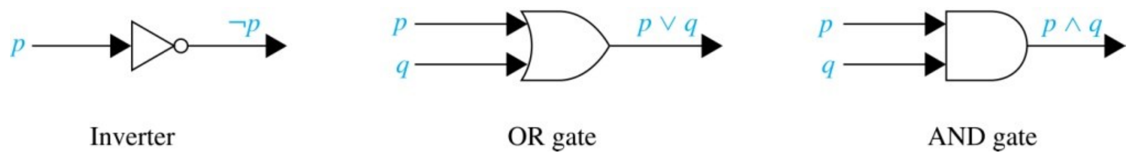
Το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στη μνήμη ή αναμεταδίδεται	$p \vee q$
Το διαγνωστικό μήνυμα δεν αποθηκεύεται στη μνήμη	$\neg p$
Εάν το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στη μνήμη, τότε αναμεταδίδεται	$p \Rightarrow q$
Το διαγνωστικό μήνυμα δεν αναμεταδίδεται	$\neg q$

  - Πίνακας αληθείας:

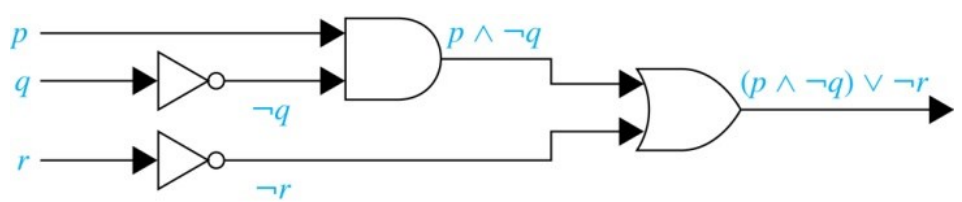
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$(p \vee q) \wedge \neg p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge \neg q$
T	T	F	F	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	F

<u>Σημείωση</u>: Αυτό αποτελεί αντίφαση! Οι προτάσεις μας δεν είναι πλέον συνεπείς!

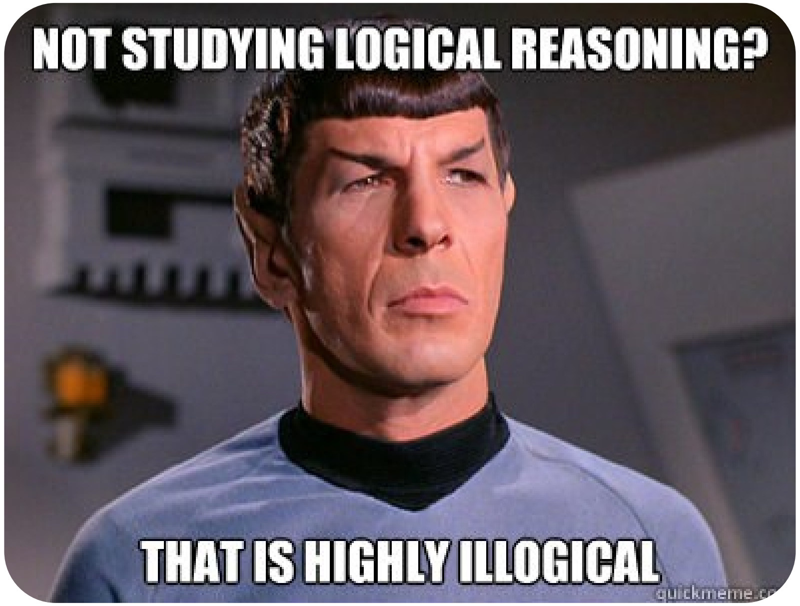
- Λογικά κυκλώματα
  - Τα ηλεκτρονικά σήματα μπορούν να θεωρηθούν ως δυαδικά: φέρουν είτε υψηλή τάση (1 ή **Αληθές**) είτε χαμηλή τάση (0 ή **Ψευδές**)
  - Τα ηλεκτρονικά κυκλώματα κατασκευάζονται από τα βασικά κυκλώματα που ονομάζονται πύλες, π.χ.:



  - Πολύπλοκα κυκλώματα μπορούν να κατασκευαστούν με το συνδυασμό πυλών, π.χ.



Μέρος III: Λογική Ισοδυναμία και Αιτιολόγηση



Ισοδυναμία Σύνθετων Προτάσεων

- Δύο σύνθετες προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες αν και μόνο αν
  - Περιλαμβάνουν τις ίδιες ατομικές προτάσεις
  - Οι τιμές αληθείας είναι πανομοιότυπες για κάθε συνδυασμό τιμών αληθείας των επιμέρους ατομικών προτάσεων
- Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας πίνακα αληθείας, ότι κάθε συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι ισοδύναμη της αντιθετοαντίστροφής της

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

$p \Rightarrow q$ και η αντιθετοαντί-στροφή της έχουν πανομοιότυπες τιμές για όλους τους συνδυασμούς ατομικών προτάσεων p, q

Ισοδυναμία Σύνθετων Προτάσεων

- Με άλλα λόγια, δύο σύνθετες προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες εάν και μόνο εάν η ισοδυναμία τους είναι πάντα αληθής, δηλ. είναι ταυτολογία

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

<u>Σημείωση</u>: Είναι ταυτολογία!

- Η λογική ισοδυναμία δύο σύνθετων προτάσεων συχνά συμβολίζεται με το ≡
  - π.χ. $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Σημαντικές Λογικές Ισοδυναμίες

- Νόμοι De Morgan
  - $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$
  - Απόδειξη:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \land q$	$\neg(p \land q)$	$\neg p \lor \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

Augustus De Morgan
1806-1871

  - $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$
  - Απόδειξη:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \lor q$	$\neg(p \lor q)$	$\neg p \land \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

Σημαντικές Λογικές Ισοδυναμίες

Όνομα	Ισοδυναμία	Όνομα	Νόμος
Ταυτοτικοί	$p \wedge \mathrm{T} \equiv p$	Αντιμεταθετικοί	$p \vee q \equiv q \vee p$
	$p \vee \mathrm{F} \equiv p$		$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Κυριαρχίας	$p \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$	Προσεταιριστικοί	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
	$p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$		$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Αυτοδυναμίας	$p \vee p \equiv p$	Επιμεριστικοί	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	$p \wedge p \equiv p$		$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Άρνησης	$p \vee \neg p \equiv \mathrm{T}$	Απορρόφησης	$p \vee (q \wedge p) \equiv p$
	$p \wedge \neg p \equiv \mathrm{F}$		$p \wedge (q \vee p) \equiv p$
Διπλής Άρνησης	$\neg(\neg p) \equiv p$		

Απόδειξη Λογικής Ισοδυναμίας

- Μπορούμε τυπικά να αποδείξουμε ότι δύο σύνθετες προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες μέσω μιας σειράς λογικά ισοδύναμων δηλώσεων
- Για να αποδείξουμε ότι $p \equiv q$, παραθέτουμε μια σειρά από ισοδυναμίες ξεκινώντας με το p και καταλήγοντας στο q

$$
\begin{aligned}
p &\equiv r_1 \\
r_1 &\equiv r_2 \\
r_2 &\equiv r_3 \\
&\vdots \\
r_n &\equiv q
\end{aligned}
$$

Απόδειξη Λογικής Ισοδυναμίας

- Δείξτε ότι $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$
  - Απόδειξη:

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$	$\equiv$	$\neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$	2ος νόμος De Morgan
	$\equiv$	$\neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q)$	1ος νόμος De Morgan
	$\equiv$	$\neg p \wedge (p \vee \neg q)$	Νόμος Διπλής Άρνησης
	$\equiv$	$(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	2ος Επιμεριστικός νόμος
	$\equiv$	$\mathrm{F} \vee (\neg p \wedge \neg q)$	Νόμος Άρνησης
	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q) \vee \mathrm{F}$	Αντιμεταθετικός νόμος
	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q)$	Ταυτοτικός νόμος για F

Κανόνες Συνεπαγωγής

- Ένας κανόνας συνεπαγωγής στην προτασιακή λογική είναι μια ακολουθία προτάσεων:

$$\left.\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array}\right\} \text{υποθέσεις}$$

$$\overline{\quad q \quad} \rightarrow \text{συμπέρασμα}$$

- Η συνεπαγωγή ισχύει εάν και μόνο εάν οι υποθέσεις λογικά υπονοούν το συμπέρασμα
  - Με άλλα λόγια, αν και μόνο αν η συνεπαγωγή $(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \Rightarrow q$ αποτελεί ταυτολογία
  - Τα σύμβολα ∴ ή ⊨ συχνά χρησιμοποιούνται για να συμβολίζουν λογική ισοδυναμία

Σημαντικοί Κανόνες Συνεπαγωγής

Όνομα Κανόνα	Κανόνας	Αντίστοιχη Ταυτολογία	Όνομα Κανόνα	Κανόνας	Αντίστοιχη Ταυτολογία
Modus Ponens	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$	Πρόσθεση	$\begin{array}{l} p \\ \hline p \vee q \end{array}$	$p \Rightarrow p \vee q$
Modus Tollens	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$	Απλοποίηση	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline q \end{array}$	$p \wedge q \Rightarrow q$
Υποθετικός Συλλογισμός	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$	Σύζευξη	$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$	$p \wedge q \Rightarrow p \wedge q$
Διαζευκτικός Συλλογισμός	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$	$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$	Επίλυση	$\begin{array}{l} \neg p \vee r \\ p \vee q \\ \hline q \vee r \end{array}$	$(\neg p \vee r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow q \vee r$

Σημαντικοί Κανόνες Συνεπαγωγής

- Ο κανόνας της Επίλυσης παίζει σημαντικό ρόλο στην Τεχνητή Νοημοσύνη και την Prolog
- Θεωρήστε
  - p σημαίνει "Θα διαβάσω Προγραμματισμό."
  - r σημαίνει "Θα διαβάσω Δίκτυα Υπολογιστών."
  - q σημαίνει "Θα διαβάσω Γραφικά Υπολογιστών."
  - Τότε σύμφωνα με τον κανόνα της Επίλυσης, από τις υποθέσεις
    - "Δεν θα διαβάσω Προγραμματισμό ή θα διαβάσω Δίκτυα Υπολογιστών."
    - "Θα διαβάσω Προγραμματισμό ή θα διαβάσω Γραφικά Υπολογιστών."

    μπορούμε να συμπεράνουμε ότι
    - "Θα διαβάσω Δίκτυα Υπολογιστών ή θα διαβάσω Γραφικά Υπολογιστών."

Επιχειρήματα

- Ένα έγκυρο επιχείρημα είναι μια ακολουθία προτάσεων τέτοια ώστε:
  - Κάθε πρόταση είναι είτε υπόθεση είτε ακολουθεί από προηγούμενες προτάσεις στη σειρά μέσω της εφαρμογής κατάλληλων κανόνων συνεπαγωγής
  - Η τελευταία πρόταση αποτελεί το συμπέρασμα

$$\left.\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array}\right\} \text{Προτάσεις – κάθε } p_i \text{ είναι είτε υπόθεση είτε ακολουθεί από μία οι περισσότερες προτάσεις } p_k\ (k < i)$$

$$q \longrightarrow \text{συμπέρασμα}$$

Επιχειρήματα

- Υποθέσεις:
  - “Δεν έχει ήλιο και έχει περισσότερο κρύο από χθες.”
  - “Θα πάμε για κολύμπι μόνο εάν έχει ήλιο.”
  - “Αν δεν πάμε για κολύμπι, θα πάμε για βαρκάδα.”
  - “Αν πάμε για βαρκάδα, θα γυρίσουμε σπίτι μέχρι το ηλιοβασίλεμα.”
  - Χρησιμοποιώντας κατάλληλους κανόνες συμπερασμού, κατασκευάστε ένα έγκυρο επιχείρημα για την εξαγωγή του συμπεράσματος
    - “Θα γυρίσουμε σπίτι μέχρι το ηλιοβασίλεμα”.
  - Λύση
    - Προσδιορισμός ατομικών προτάσεων

p	Έχει ήλιο
q	Έχει περισσότερο κρύο από χθες
r	Θα πάμε για κολύμπι
s	Θα πάμε βαρκάδα
t	Θα γυρίσουμε σπίτι μέχρι το ηλιοβασίλεμα

Επιχειρήματα

- Λύση
  - Μετάφραση υποθέσεων σε προτασιακή λογική

1.	$\neg p \wedge q$	Υπόθεση 1	3.	$\neg r \Rightarrow s$	Υπόθεση 3
2.	$r \Rightarrow p$	Υπόθεση 2	4.	$s \Rightarrow t$	Υπόθεση 4

  - Κατασκευή έγκυρου επιχειρήματος

1.	$\neg p \wedge q$	Υπόθεση 1
2.	$\neg p$	Απλοποίηση, γραμμή 1
3.	$r \Rightarrow p$	Υπόθεση 2
4.	$\neg r$	Modus Tollens, γραμμές 2 & 3
5.	$\neg r \Rightarrow s$	Υπόθεση 3
6.	s	Modus Ponens, γραμμές 4 & 5
7.	$s \Rightarrow t$	Υπόθεση 4
8.	t	Modus Ponens, γραμμές 6 & 7

Επιχειρήματα

- Μια τυπική απόδειξη λαμβάνει τη μορφή επιχειρήματος
  - Μας επιτρέπει να δείξουμε «επισήμως» την εξαγωγή μιας δήλωσης από ένα σύνολο άλλων δηλώσεων που παίζουν το ρόλο των υποθέσεων
  - Το παράδειγμα της προηγούμενης διαφάνειας αποτελεί ένα απλό παράδειγμα τυπικής απόδειξης