ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Διακριτά Μαθηματικά

Κατηγορηματική Λογική

Δρ. Θωμάς Λάγκας

Επισκόπηση

- Εισαγωγή – η ανάγκη για Κατηγορηματική Λογική
- Μεταβλητές
- Κατηγορήματα (ή Προτασιακές Συναρτήσεις)
- Ποσοτικοί Δείκτες
- Μετάφραση Φυσικής Γλώσσας
- Άρνηση Ποσοτικοποιημένων Δηλώσεων
- Φωλιασμένοι Ποσοτικοί Δείκτες
- Προτεραιότητα Ποσοτικοποίησης

Εισαγωγή

- Περιορισμοί Προτασιακής Λογικής
  - Θεωρήστε τις δηλώσεις
    - *“Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.”*
    - *“Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.”*
  - Συνεπάγεται ότι
    - *“Ο Σωκράτης είναι θνητός.”*

  - Η απάντηση είναι προφανώς ‘ναι’
    - Ωστόσο, τέτοιου είδους δηλώσεις δεν μπορούν να εκφραστούν μέσω Προτασιακής Λογικής…
  - Αντί αυτού, χρειαζόμαστε μια γλώσσα που μπορεί να συλλάβει τέτοιες έννοιες, όπως:
    - Ποσοτικοποίηση (π.χ. *Όλα, Υπάρχει*)
    - Ιδιότητες (π.χ. *θνησιμότητα(ανθρώπων)*)
    - Σχέσεις (π.χ. *μητρότητα μεταξύ δύο ανθρώπων*)
- Η Κατηγορηματική Λογική είναι μια γλώσσα που παρέχει αυτές τις δυνατότητες

Εισαγωγή

- Η Κατηγορηματική Λογική αποτελεί στην πραγματικότητα ένα υπερσύνολο της Προτασιακής Λογικής
  - Η θεωρία που καλύψαμε στην Προτασιακή Λογική συνεχίζει και ισχύει στην Κατηγορηματική Λογικής
- Εισάγει τα ακόλουθα νέα χαρακτηριστικά
  - Μεταβλητές (π.χ. x, y, z)
  - Κατηγορήματα ή Προτασιακές Συναρτήσεις (π.χ. $P(x)$, $Q(y, r)$, κτλ.)
  - Ποσοτικοί Δείκτες

Μεταβλητές

- Δεν πρόκειται για προτασιακές μεταβλητές όπως αυτές που συναντήσαμε στην Προτασιακή Λογική
- Αντί αυτού, πρόκειται για μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν στοιχεία ενός συνόλου αντικειμένων – π.χ. μια μεταβλητή x που αντιπροσωπεύει «στοιχεία» από το σύνολο των ανθρώπων
  - Παρατηρήστε ότι ο όρος ‘αντικείμενο’ φέρει ευρύτερο νόημα
  - Ένα αντικείμενο είναι μια οντότητα που μπορεί να φέρει μια ιδιότητα ή να συμμετέχει σε μια σχέση
    - Π.χ. ένας άνθρωπος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ‘αντικείμενο’
- Τα αντικείμενα πάντα προέρχονται από ένα υποκείμενο πεδίο ορισμού U
  - Π.χ. το σύνολο όλων των ανθρώπων, το σύνολο όλων των ακεραίων, το σύνολο όλων των κατοίκων της Καβάλας, κτλ.
  - Το πεδίο ορισμού μπορεί να είναι κάθε σύνολο αντικειμένων που μοιράζονται κάποιο κοινό χαρακτηριστικό που τυχαίνει να μας ενδιαφέρει

Μεταβλητές

- Το πεδίο ορισμού συνήθως ορίζεται στις προϋποθέσεις (δηλαδή εξαρχής)
  - Αυτό μας απελευθερώνει από την υποχρέωση να το ορίζουμε κάθε φορά που συναντάμε μια μεταβλητή

Σημείωση: Το πεδίο ορισμού εναλλακτικά ονομάζεται και βασικό σύνολο ή απλά σύμπαν.

Κατηγορήματα ή Προτασιακές Συναρτήσεις

- Εκφράζονται μέσω μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών – π.χ. $P(x)$, $Q(y, r)$
- Χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν:
  - Ιδιότητες αντικειμένων – π.χ. $P(x)$ μπορεί να σημαίνει:
    - *"ο x είναι θνητός"* όπου x είναι ένα 'αντικείμενο' που προέρχεται από το σύνολο των ανθρώπων (που εδώ αποτελεί το υποκείμενο πεδίο ορισμού U)
    - *"το x διαθέτει κινητήρα 2000 κ.εκ"* όπου x είναι ένα 'αντικείμενο' που προέρχεται από το σύνολο των 'αυτοκινήτων' (που εδώ αποτελεί το υποκείμενο πεδίο ορισμού U)
  - Σχέσεις μεταξύ αντικειμένων – π.χ. $Q(y, r)$ μπορεί να σημαίνει:
    - *"y είναι μητέρα του r"* όπου y και r είναι 'αντικείμενα' που προέρχονται από το σύνολο των ανθρώπων (που εδώ αποτελεί το υποκείμενο πεδίο ορισμού U)
    - *"y είναι μεγαλύτερο του r"* όπου y και r είναι 'αντικείμενα' που προέρχονται από το σύνολο όλων των 'ακεραίων' (που εδώ αποτελεί το υποκείμενο πεδίο ορισμού U)
- Προφανώς, μια μεταβλητή σε ένα κατηγόρημα (ή προτασιακή συνάρτηση) μπορεί να αντικατασταθεί από κάθε συγκεκριμένο στοιχείο του πεδίου ορισμού

Κατηγορήματα ή Προτασιακές Συναρτήσεις

- Όταν όλες οι μεταβλητές σε ένα κατηγόρημα αντικαθίστανται από συγκεκριμένες τιμές (από τα πεδία ορισμού τους), τότε το κατηγόρημα γίνεται πρόταση
- Έστω $P(x)$ η δήλωση $x > 0$ και έστω ότι το πεδίο ορισμού U είναι το σύνολο των ακεραίων ($U = \mathbb{Z}$)
  - Τότε το $P(3)$ αποτελεί πρόταση
  - Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης $P(3) \lor P(-1)$ είναι T
  - Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης $P(3) \land P(-1)$ είναι F
  - Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης $P(3) \Rightarrow P(-1)$ είναι F
  - Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης $P(-1) \Rightarrow P(3)$ είναι T
- Σημειώστε ότι οι εκφράσεις που δεν περιλαμβάνουν μεταβλητές (δηλ. τα κατηγορήματα) δεν μπορούν να λάβουν τιμές αληθείας, οπότε δεν αποτελούν προτάσεις
  - Π.χ. Ποια είναι η τιμή αληθείας της δήλωσης $P(x) \Rightarrow P(3)$?

Ποσοτικοί Δείκτες

- Υπάρχουν δύο κύριοι ποσοδείκτες:
  - Ο καθολικός ποσοτικός δείκτης ($\forall$ - διαβάζεται “για όλα”)
  - Ο υπαρξιακός ποσοτικός δείκτης ($\exists$ - διαβάζεται “υπάρχει”)
- Μια καθολική ποσοτικοποίηση της μορφής $\forall x P(x)$ σημαίνει ότι το κατηγόρημα $P(x)$ ισχύει για κάθε x που προέρχεται από το υποκείμενο πεδίο ορισμού U
- Μια υπαρξιακή ποσοτικοποίηση της μορφής $\exists x P(x)$ σημαίνει ότι το κατηγόρημα $P(x)$ ισχύει για κάποια x που προέρχονται από το υποκείμενο πεδίο ορισμού U
  - “Μερικά” σημαίνει “τουλάχιστον ένα”
- Στις παραπάνω εκφράσεις, η μεταβλητή x περιορίζεται από τους ποσοτικούς δείκτες
  - Δηλ. οι μεταβλητές αυτές δεν είναι πλέον ελεύθερες

Ποσοτικοί Δείκτες

$P(x)$ συμβολίζει $x \geq 0$	$P(x)$ συμβολίζει $x \geq 1 \vee x \leq 0$
Για $U = \mathbb{Z}$	Για $U = \mathbb{Z}$
$\exists x P(x)$ είναι αληθές (T) $\forall x P(x)$ είναι ψευδές (F)	$\exists x P(x)$ είναι αληθές (T) $\forall x P(x)$ είναι αληθές (T)
Για $U = \mathbb{N}$	Για $U = \mathbb{R}$
$\exists x P(x)$ είναι αληθές (T) $\forall x P(x)$ είναι αληθές (T)	$\exists x P(x)$ είναι αληθές (T) $\forall x P(x)$ είναι ψευδές (F)

- Προφανώς, τα ποσοτικοποιημένα κατηγορήματα λαμβάνουν τιμές αληθείας (T ή F)
  - Οπότε αποτελούν προτάσεις
- Η τιμή αληθείας μιας καθολικά ποσοτικοποιημένης έκφρασης $\forall x P(x)$ ή μιας υπαρξιακά ποσοτικοποιημένης έκφρασης $\exists x P(x)$, εξαρτάται από:
  - Το κατηγόρημα $P(x)$
  - Το υποκείμενο πεδίο ορισμού U

Ποσοτικοί Δείκτες

- Ένας τρίτος ποσοτικός δείκτης είναι αυτός της μοναδικότητας ($\exists_1$ - διαβάζει “υπάρχει ακριβώς ένα”)
- Ένας υπαρξιακός ποσοτικός δείκτης της μορφής $\exists_1 x P(x)$ σημαίνει ότι το κατηγόρημα $P(x)$ ισχύει για μόνο ένα x που προέρχεται από το υποκείμενο πεδίο ορισμού U
- Έστω $P(x) = x < 1$
  - Για $U = \mathbb{Z}$
    - $\exists_1 x P(x)$ είναι ψευδές (F)
  - Για $U = \mathbb{N}$
    - $\exists_1 x P(x)$ είναι αληθές (T)
- Οι τρεις ποσοτικοί δείκτες ($\forall$, $\exists$, $\exists_1$) έχουν υψηλότερη προτεραιότητα από οποιονδήποτε άλλο λογικό τελεστή
  - Π.χ. $\forall x\, P(x) \lor Q(x)$ σημαίνει $(\forall x\, P(x)) \lor Q(x)$ και όχι $\forall x (P(x) \lor Q(x))$

Ποσοτικοί Δείκτες

Σημείωση: Αυτό είναι ανάλογο της ισοδυναμίας στην Προτασιακή Λογική

- Δύο ποσοτικοποιημένες δηλώσεις είναι λογικά ισοδύναμες εάν και μόνο εάν έχουν την ίδια τιμή αληθείας
  - Ο συμβολισμός ≡ χρησιμοποιείται για να δείξει ισοδυναμία
    - Π.χ. $\forall x\ (\neg\neg P(x)) \equiv \forall x P(x)$
- Η καθολική και η υπαρξιακή ποσοτικοποίηση πάνω σε ένα πεπερασμένο πεδίο U (δηλ. ένα που αποτελείται από n διαφορετικά στοιχεία) μπορεί να θεωρηθεί ως μια σύζευξη και διάζευξη αντιστοίχως όλων των στοιχείων του U
  - $\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$
  - $\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$
- Ομοίως, ο ποσοτικός δείκτης της μοναδικότητας μπορεί να θεωρηθεί ως μια αποκλειστική διάζευξη όλων των στοιχείων του U
- Ακόμα και αν το U είναι άπειρο, οι ποσοτικοί δείκτες μπορούν να θεωρηθούν με τον παραπάνω τρόπο (αλλά με άπειρο πλήθος διαζεύξεων και συζεύξεων)

Μετάφραση Φυσικής Γλώσσας

- Μεταφράστε την πρόταση: “*Κάθε φοιτητής της τάξης έχει παρακολουθήσει μάθημα Java.*”

Λύση 1

- Αποφασίζοντας το πεδίο ορισμού: έστω U είναι το σύνολο όλων των φοιτητών της τάξης
- Έστω $P(x)$ είναι το κατηγόρημα “*ο x έχει παρακολουθήσει μάθημα Java*”
- Τότε η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται ως: $\forall x\ P(x)$

Λύση 2

- Αποφασίζοντας το πεδίο ορισμού: έστω U είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων
- Έστω $Q(x)$ είναι το κατηγόρημα “*ο x είναι φοιτητής της τάξης*”
- Έστω $P(x)$ είναι το κατηγόρημα “*ο x έχει παρακολουθήσει μάθημα Java*”
- Τότε η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται ως: $\forall x\ (Q(x)\ \Rightarrow\ P(x))$

<u>Σημείωση</u>: Απαιτείται έξτρα κατηγόρημα για το περιορισμό του x στο σωστό πεδίο

- Θα ήταν το $\forall x\ (Q(x)\ \land\ P(x))$ σωστό για τη Λύση 2?
  Όχι – σημαίνει: “*Όλοι οι άνθρωποι είναι φοιτητές της τάξης <u>και</u> έχουν παρακολουθήσει μάθημα Java.*”

Μετάφραση Φυσικής Γλώσσας

- Μεταφράστε την πρόταση: *"Μερικοί φοιτητές της τάξης έχουν παρακολουθήσει μάθημα Java."*

Λύση 1

- Αποφασίζοντας το πεδίο ορισμού: έστω U είναι το σύνολο όλων των φοιτητών της τάξης
- Έστω $P(x)$ είναι το κατηγόρημα *"ο x έχει παρακολουθήσει μάθημα Java"*
- Τότε η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται ως: $\exists x\, P(x)$

Λύση 2

- Αποφασίζοντας το πεδίο ορισμού: έστω U είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων
- Έστω $Q(x)$ είναι το κατηγόρημα *"ο x είναι φοιτητής της τάξης"*
- Έστω $P(x)$ είναι το κατηγόρημα *"ο x έχει παρακολουθήσει μάθημα Java"*
- Τότε η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται ως: $\exists x\, (Q(x) \land P(x))$

<u>Σημείωση</u>: Απαιτείται έξτρα κατηγόρημα για το περιορισμό του x στο σωστό πεδίο

- Θα ήταν το $\exists x\, (Q(x) \Rightarrow P(x))$ σωστό για τη Λύση 2?
- Όχι – σημαίνει: *"Υπάρχει κάποιος που έχει παρακολουθήσει μάθημα Java αν είναι φοιτητής αυτής της τάξης."*

Μετάφραση Φυσικής Γλώσσας

- (συνέχεια…)
  - Αλλά αυτό δεν εγγυάται ότι αυτός ο ‘κάποιος’ είναι φοιτητής της τάξης:
    - Λέει απλά ότι αν αυτός ο ‘κάποιος’ τυχαίνει να είναι φοιτητής της τάξης, τότε αυτός ο κάποιος έχει επίσης παρακολουθήσει μάθημα Java
  - Ωστόσο, η αρχική μας πρόταση απαιτεί ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένας) φοιτητής της τάξης που έχει παρακολουθήσει μάθημα Java…

Μετάφραση Φυσικής Γλώσσας

- Μεταφράστε την πρόταση: “*Μερικοί φοιτητές της τάξης έχουν επισκεφτεί το Μεξικό.*”
  - Αποφασίζοντας το πεδίο ορισμού: έστω U είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων
  - Έστω $Q(x)$ είναι το κατηγόρημα “*ο x είναι φοιτητής της τάξης*”
  - Έστω $P(x)$ είναι το κατηγόρημα “*ο x έχει επισκεφτεί το Μεξικό*”
  - Τότε η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται ως: $\exists x\big(Q(x) \wedge P(x)\big)$
- Μεταφράστε την πρόταση: “*Κάθε φοιτητής της τάξης έχει επισκεφτεί το Μεξικό ή τον Καναδά.*”
  - Αποφασίζοντας το πεδίο ορισμού: έστω U είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων
  - Έστω $Q(x)$ είναι το κατηγόρημα “*ο x είναι φοιτητής της τάξης*”
  - Έστω $P(x)$ είναι το κατηγόρημα “*ο x έχει επισκεφτεί το Μεξικό*”
  - Έστω $R(x)$ είναι το κατηγόρημα “*ο x έχει επισκεφτεί τον Καναδά*”
  - Τότε η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται ως: $\forall x(Q(x) \Rightarrow (P(x) \vee R(x)))$

Μετάφραση Φυσικής Γλώσσας

- Επιστρέφοντας στο παράδειγμα του Σωκράτη…
  - Θεωρήστε τα ακόλουθα κατηγορήματα (ή προτασιακές συναρτήσεις)
    - $Άνθρωπος(x)$ – εκφράζει την ιδιότητα «είναι άνθρωπος» του αντικειμένου x
    - $\text{Θνητός}(x)$ – εκφράζει την ιδιότητα «είναι θνητός» του αντικειμένου x
  - Έστω ότι πεδίο ορισμού U είναι όλα τα αντικείμενα (οντότητες)
  - Τότε,

	Προτάσεις σε Φυσική Γλώσσα	Προτάσεις σε Κατηγορηματική Λογική
Υποθέσεις	*Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.*	$\forall x\ (Άνθρωπος(x)\ \Rightarrow \text{Θνητός}(x))$
	Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.	$Άνθρωπος(\text{Σωκράτης})$
Συμπέρασμα	*Ο Σωκράτης είναι θνητός.*	$\text{Θνητός}(\text{Σωκράτης})$

Μετάφραση Φυσικής Γλώσσας

- Επιστροφή στο παράδειγμα του Σωκράτη

Σημείωση: Η τυπική απόδειξη του προηγούμενου συμπεράσματος έχει ως ακολούθως:

1.	$\forall x\ (Άνθρωπος(x)\ \Rightarrow Θνητός(x))$	Υπόθεση 1
2.	$Άνθρωπος(\text{Σωκράτης})\ \Rightarrow Θνητός(\text{Σωκράτης})$	∀-Εξάλειψη, Γραμμή 1
3.	$Άνθρωπος(\text{Σωκράτης})$	Υπόθεση 2
4.	$\text{Θνητός}(\text{Σωκράτης})$	Modus Ponens, γραμμές 2 & 3

Σύμφωνα με τη γραμμή 1, το κατηγόρημα $Άνθρωπος(x)\ \Rightarrow$ $\mathbf{Θνητός}(x)$ ισχύει για όλα τα x στο U οπότε ισχύει και για τον $\mathbf{Σωκράτη}$ που ανήκει στο U

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Άρνηση Καθολικά Ποσοτικοποιημένων Εκφράσεων

- Έστω U είναι το σύνολο όλων των φοιτητών στην τάξη και έστω το κατηγόρημα $P(x)$ σημαίνει "*ο* x έχει παρακολουθήσει μάθημα Java"
  - Τότε $\forall x P(x)$ σημαίνει "*Κάθε φοιτητής στην τάξη έχει παρακολουθήσει μάθημα Java*"
  - Θεωρήστε την άρνηση της παραπάνω ποσοτικοποιημένης δήλωσης:
    - $\neg \forall x P(x)$ σημαίνει "*Όχι κάθε φοιτητής της τάξης έχει παρακολουθήσει μάθημα Java*"
    - Αυτό είναι ισοδύναμο με τη δήλωση "*Υπάρχει τουλάχιστον ένας φοιτητής της τάξης που δεν έχει παρακολουθήσει μάθημα Java*"
- Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Σημείωση: Αυτό επίσης προκύπτει από τον 1^{o} Νόμο De Morgan και το γεγονός ότι η καθολική ποσοτικοποίηση μπορεί να εκφραστεί ως σύζευξη όλων των στοιχείων του πεδίου ορισμού

Άρνηση Καθολικά Ποσοτικοποιημένων Εκφράσεων

- Έστω και πάλι ότι U είναι το σύνολο όλων των φοιτητών στην τάξη και έστω το κατηγόρημα $P(x)$ σημαίνει "*ο* x έχει παρακολουθήσει μάθημα Java"
  - Τότε το $\exists x P(x)$ σημαίνει "*Υπάρχει φοιτητής της τάξης που έχει παρακολουθήσει μάθημα Java*"
  - Θεωρήστε την άρνηση της παραπάνω ποσοτικοποιημένης δήλωσης:
    - $\neg\exists x P(x)$ σημαίνει "*Δεν υπάρχει φοιτητής της τάξης που έχει παρακολουθήσει Java*"
    - Αυτό είναι ισοδύναμο με τη δήλωση"*Κάθε φοιτητής της τάξης δεν έχει παρακολουθήσει μάθημα Java*"
- Προκύπτει ότι $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Σημείωση: Αυτό επίσης προκύπτει από τον 2ο Νόμο De Morgan και το γεγονός ότι η υπαρξιακή ποσοτικοποίηση μπορεί να εκφραστεί ως διάζευξη όλων των στοιχείων του πεδίου ορισμού

Μετάφραση Φυσικής Γλώσσας

- Το παράδειγμα του Lewis Carroll

  1. *"Όλα τα λιοντάρια είναι άγρια."*
  2. *"Μερικά λιοντάρια δεν πίνουν καφέ."*

  Υποθέσεις

  3. *"Μερικά άγρια πλάσματα δεν πίνουν καφέ."*

  Συμπέρασμα

  - Θέτουμε
    - $P(x)$ το κατηγόρημα *"το x είναι λιοντάρι."*
    - $Q(x)$ το κατηγόρημα *"το x είναι άγριο."*
    - $R(x)$ το κατηγόρημα *"το x πίνει καφέ."*

  Σημείωση: Εδώ υπονοείται ότι το πεδίο ορισμού είναι όλα τα πλάσματα

  - Τότε
    1. $\forall x\ (P(x)\ \Rightarrow\ Q(x))$
    2. $\exists x\ (P(x)\ \wedge\ \neg R(x))$

    Υποθέσεις

    3. $\exists x\ (Q(x)\ \wedge\ \neg R(x))$

    Συμπέρασμα

Μετάφραση Φυσικής Γλώσσας

- Το παράδειγμα Lewis Carroll (συνέχεια)

<u>Σημείωση</u>: Η τυπική απόδειξη που προκύπτει από την προηγούμενη διαφάνεια έχει ως ακολούθως:

1.	$\exists x\ (P(x)\ \wedge\ \neg R(x))$	Υπόθεση 2
2.	$P(a)\ \wedge\ \neg R(a)$	∃-Εξάλειψη, γραμμή 1
3.	$P(a)$	Απλοποίηση, γραμμή 2
4.	$\neg R(a)$	Απλοποίηση, γραμμή 2
5.	$\forall x\ (P(x)\ \Rightarrow\ Q(x))$	Υπόθεση 1
6.	$P(a)\ \Rightarrow\ Q(a)$	∀-Εξάλειψη, γραμμή 1
7.	$Q(a)$	Modus Ponens, γραμ. 3 & 6
8.	$Q(a)\ \wedge\ \neg R(a)$	Σύζευξη, γραμμές 4 & 7
9.	$\exists x\ (Q(x)\ \wedge\ \neg R(x))$	∃-Εισαγωγή, γραμμή 8

Σύμφωνα με τη γραμμή 1 το κατηγόρημα $P(x)\ \wedge\ \neg R(x)$ ισχύει για μερικά x στο U, έστω ότι αυτό το x είναι το a

Σύμφωνα με τη γραμμή 5 το κατηγόρημα $P(x)\ \Rightarrow\ Q(x)$ ισχύει για όλα τα x στο U κι έτσι ισχύει και για το a που ανήκει στο U

Σύμφωνα με τη γραμμή 8, το κατηγόρημα $Q(a)\ \wedge\ \neg R(a)$ ισχύει για <u>μερικά</u> x (όπως το a) στο U

Προδιαγραφές Συστήματος

- Μεταφράστε τις ακόλουθες προδιαγραφές συστήματος σε κατηγορηματική λογική:
  - *"Κάθε email μεγαλύτερο από 1MB συμπιέζεται."*
  - *"Αν ένας χρήστης είναι ενεργός, τουλάχιστον μια σύνδεση θα είναι διαθέσιμη."*
  - Βήμα 1: Αποφασίστε κατάλληλα κατηγορήματα
    - Έστω $P(m, v)$ το κατηγόρημα *"Το email* m *είναι μεγαλύτερο από* v *MB."*
    - Έστω $Q(m)$ το κατηγόρημα *"Το email* m *συμπιέζεται."*
    - Έστω $R(u)$ το κατηγόρημα *"Ο χρήστης* u *είναι ενεργός."*
    - Έστω $S(n, x)$ το κατηγόρημα *"Η σύνδεση* n *βρίσκεται στην κατάσταση* x*."*
  - Βήμα 2: Εκφράστε τις δηλώσεις σε κατηγορηματική λογική
    - $\forall m \ (P(m,1) \ \Rightarrow \ Q(m))$
    - $\forall u \ (R(u) \ \Rightarrow \ \exists n \ S(n, \delta\iota\alpha\theta\varepsilon\sigma\iota\mu\eta))$

Σημείωση: Τα σχετικά πεδία ορισμού υπονοείται ότι είναι το σύνολο όλων των email, το σύνολο όλων των χρηστών και το σύνολο όλων των συνδέσεων

Φωλιασμένοι Ποσοτικοί Δείκτες

- Είναι συχνά απαραίτητο να φωλιάζουμε ποσοτικούς δείκτες ώστε να αποδώσουμε το νόημα συγκεκριμένων προτάσεων
- Μεταφράστε την ακόλουθη πρόταση σε Κατηγορηματική Λογική: “*Κάθε ακέραιος έχει έναν αντίθετο.*”
  - Έστω ότι το πεδίο ορισμού είναι οι ακέραιοι (δηλ. $U = \mathbb{Z}$)
  - Τότε $\forall x\ \exists y\ (x + y = 0)$

Το ποσοτικοποιημένο κατηγόρημα, έστω ότι είναι το $\mathbf{Αντίθετο}(x, y)$

  - Εναλλακτικά, το παραπάνω ποσοτικοποιημένο κατηγόρημα μπορεί να θεωρηθεί και ως εξής:

    $\forall x\ \exists y\ (x + y = 0)$

$Q(x) \equiv \exists y\ \mathrm{Αντίθετο}(x, y)$

Σειρά Ποσοτικοποίησης

- Η σειρά της ποσοτικοποίησης είναι γενικά σημαντική
- Έστω $P(x, y) \equiv (x + y = 0)$ και $U = \mathbb{R}$
  - Τότε το $\forall x \exists y\ P(x, y)$ είναι αληθές
  - Αλλά το $\exists y \forall x\ P(x, y)$ δεν είναι
- Ωστόσο, σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να μην είναι σημαντική
- Έστω $Q(x) \equiv (x + y = y + x)$ και $U = \mathbb{R}$
  - $\forall x \forall y Q(x, y)$ είναι ισοδύναμο με το $\forall y \forall x Q(x, y)$
  - $\exists x \exists y Q(x, y)$ είναι ισοδύναμο με το $\exists y \exists x Q(x, y)$

Σημείωση:
Η σειρά των φωλιασμένων καθολικών ποσοτικών δεικτών σε μια δήλωση χωρίς άλλα είδη ποσοτικών δεικτών δεν είναι σημαντική

Σημείωση:
Η σειρά των φωλιασμένων υπαρξιακών ποσοτικών δεικτών σε μια δήλωση χωρίς άλλα είδη ποσοτικών δεικτών δεν είναι σημαντική

Σειρά Ποσοτικοποίησης

- Έστω $P(x,y) \equiv (xy = 0)$ και $U = \mathbb{R}$
  - $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \equiv \mathrm{F}$
  - $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \equiv \mathrm{T}$
  - $\exists x\, \forall y\, P(x,y) \equiv \mathrm{T}$
  - $\exists x\, \exists y\, P(x,y) \equiv \mathrm{T}$
- Έστων $P(x,y) \equiv (\frac{x}{y} = 0)$ και $U = \mathbb{R}$
  - $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \equiv \mathrm{F}$
  - $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \equiv \mathrm{F}$
  - $\exists x\, \forall y\, P(x,y) \equiv \mathrm{F}$
  - $\exists x\, \exists y\, P(x,y) \equiv \mathrm{T}$

Σειρά Ποσοτικοποίησης

- Έστω $P(x, y)$ είναι ένα κατηγόρημα δύο μεταβλητών

Ποσοτικοποιημένη δήλωση	Είναι αληθές όταν…	Είναι ψευδές όταν…
$\forall x\, \forall y\, P(x, y)$ $\forall y \forall x\, P(x, y)$	$P(x, y)$ είναι αληθές για κάθε ζευγάρι (x, y)	Υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι (x, y) που διαψεύδει $P(x, y)$
$\forall x\, \exists y\, P(x, y)$	Για κάθε x υπάρχει ένα y τέτοιο ώστε το $P(x, y)$ ισχύει	Υπάρχει ένα x τέτοιο ώστε το $P(x, y)$ δεν ισχύει για κάθε y
$\exists x\, \forall y\, P(x, y)$	Υπάρχει ένα x τέτοιο ώστε το $P(x, y)$ ισχύει για κάθε y	Για κάθε x υπάρχει ένα y τέτοιο ώστε το $P(x, y)$ δεν ισχύει
$\exists x\, \exists y\, P(x, y)$ $\exists y\, \exists x\, P(x, y)$	Υπάρχει ένα ζευγάρι (x, y) που επαληθεύει το $P(x, y)$	$P(x, y)$ είναι ψευδές για κάθε ζευγάρι (x, y)