ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

2 Ο Ορισμός της Πιθανότητας

- Η πιθανότητα είναι ένα μέτρο του ενδεχομένου να συμβεί ένα γεγονός στο μέλλον
- Μπορεί να λάβει τιμές μόνο μεταξύ 0 και 1
- Μια τιμή κοντά στο μηδέν σημαίνει ότι το γεγονός δεν είναι πιθανό να συμβεί
- Μια τιμή κοντά στο ένα σημαίνει ότι το γεγονός είναι πολύ πιθανό
- Υπάρχουν τρεις ορισμοί της πιθανότητας:
    - Κλασσικός
    - Στατιστικός
    - Υποκειμενικός

3 Ο Ορισμός της Πιθανότητας

- Ο **κλασσικός** ορισμός εφαρμόζεται όταν υπάρχουν n ισοπίθανα ενδεχόμενα
- Ο **στατιστικός** ορισμός εφαρμόζεται όταν αριθμός των φορών που ένα γεγονός λαμβάνει χώρα διαιρείται με τον αριθμό των παρατηρήσεων
- Η **υποκειμενική** πιθανότητα βασίζεται σε οποιαδήποτε πληροφορία μπορεί να είναι διαθέσιμη

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Άλλοι Ορισμοί

- **Πείραμα** είναι η παρατήρηση κάποια δραστηριότητας ή πράξης λήψης κάποιων μετρήσεων
- **Αποτέλεσμα** αποτελεί το εξαγόμενο ενός συγκεκριμένου πειράματος
- Ένα **συμβάν ή γεγονός ή ενδεχόμενο** είναι μια συλλογή από ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος

Άλλοι Ορισμοί
Παράδειγμα

- ***Πείραμα***: ρίχνουμε ένα κέρμα δύο φορές
- ***Δειγματικός χώρος***: όλα τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος
  – $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
- ***Ενδεχόμενο***: ένα υποσύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων
  – $A = \{HH\}, B = \{HT, TH\}$
- ***Πιθανότητα τυχαίου ενδεχομένου***: ένας αριθμός που ανατίθεται σε ένα ενδεχόμενο A “$\mathrm{P}(A)$”
  – Αξίωμα 1: $\mathrm{P}(A) \geq 0$
  – Αξίωμα 2: $\mathrm{P}(S) = 1$
  – Αξίωμα 3: Για κάθε σειρά ξένων (αμοιβαίως αποκλειόμενων) ενδεχομένων

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)$$

  – Παράδειγμα: $P(A) = n(A)/N$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Άλλοι Ορισμοί
Αμοιβαίως Αποκλειόμενα Ενδεχόμενα και Ανεξαρτησία

- Δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα είναι **αμοιβαίως αποκλειόμενα** (ξένα), αν η εμφάνιση ενός σημαίνει ότι κανένα από τα άλλα ενδεχόμενα δεν είναι δυνατό να συμβεί ταυτόχρονα (π.χ. ρίψη κέρματος: κορώνα ή γράμματα, όχι και τα δύο)
- Αν τα *A* και *B* είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα (ξένα), τότε $\mathrm{P}(AB) = 0$
- Δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα ονομάζονται **ανεξάρτητα**, αν η εμφάνιση ενός ενδεχομένου δεν επηρεάζει την εμφάνιση του άλλου

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

7 Άλλοι Ορισμοί
Αμοιβαίως Αποκλειόμενα Ενδεχόμενα και Ανεξαρτησία

Αμοιβαίως Αποκλειόμενα → Μη Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Αν τα ενδεχόμενα A (π.χ. χαρτί κόκκινου χρώματος) και B (π.χ. χαρτί μπαστούνι) είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα (ξένα), τότε →

→ δεν μπορούν να συμβούν την ίδια στιγμή (δεν υπάρχουν κόκκινα μπαστούνια), οπότε →

→ η εμφάνιση ενός ενδεχομένου (π.χ. A: το χαρτί είναι κόκκινο) επηρεάζει την εμφάνιση το άλλου ενδεχομένου (π.χ. όχι B: το χαρτί δεν είναι μπαστούνι), που σημαίνει ότι →

→ αν το A συμβεί, τότε $\mathrm{P}(B) = 0$, συμπερασματικά →

→ **Τα αμοιβαίως αποκλειόμενα (ξένα) ενδεχόμενα είναι πάντα ΜΗ ανεξάρτητα!**

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το αντίστροφο δεν αληθεύει!
(ενδεχόμενα που δεν είναι ξένα μπορεί να είναι ανεξάρτητα ή όχι)

Άλλοι Ορισμοί
Αμοιβαίως Αποκλειόμενα Ενδεχόμενα και Ανεξαρτησία

Συλλογικά Εξαντλητικά Ενδεχόμενα

Συλλογικά εξαντλητικά ενδεχόμενα λέγονται αυτά που σε περίπτωση πειράματος τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο είναι σίγουρο ότι θα συμβεί (π.χ. όταν ρίχνουμε ένα κλασσικό ζάρι, τα αποτελέσματα 1, 2, 3, 4, 5 και 6 είναι συλλογικά εξαντλητικά)

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Άλλοι Ορισμοί
Στατιστικός ορισμός πιθανότητας

- Ο **κλασικός ορισμός** της πιθανότητας προϋποθέτει ότι όλα τα στοιχειώδη αποτελέσματα έχουν την ίδια πιθανότητα
- Σχετική συχνότητα ενδεχομένου A λέγεται ο λόγος του αριθμού των περιπτώσεων που εμφανίζεται το ενδεχόμενο αυτό προς τον αριθμό όλων των περιπτώσεων
- Αν συμβολίσουμε με $W_N(A)$ τη συχνότητα του ενδεχομένου A κατά τη διεξαγωγή του πειράματος N φορές, τότε: $\boldsymbol{W_N(A) = m/N}$
    - όπου m είναι ο αριθμός των περιπτώσεων που εμφανίζεται το A
- <u>Παράδειγμα:</u>
    - Ένας καθηγητής στην καριέρα του έχει βαθμολογήσει με ’10’ 25 γραπτά σε σύνολο 2137 φοιτητών
    - Βάσει του συγκεκριμένου στατιστικού, η πιθανότητα ένα φοιτητής να βαθμολογηθεί με ‘10’ είναι:

$$\frac{25}{2137} \approx 0{,}0117 = 1{,}17\%$$

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Ο ειδικός κανόνας της πρόσθεσης

- Αν δύο ενδεχόμενα *A* και *B* είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα (ξένα), τότε ο ειδικός κανόνας της πρόσθεσης ορίζει ότι η πιθανότητα να συμβεί το *A* ή το *B* ισούται με το άθροισμα των αντιστοίχων πιθανοτήτων: $\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{B})$

<u>Άσκηση – Παράδειγμα</u>

- Μια αεροπορική εταιρία πρόσφατα έδωσε στη δημοσιότητα τις ακόλουθες πληροφορίες σχετικά με τις πτήσεις της από την Αθήνα:

Άφιξη	Συχνότητα
Νωρίτερα	1000
Ακριβώς	8000
Αργότερα	750
Ακυρώθηκε	250
Σύνολο	10000

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Ο ειδικός κανόνας της πρόσθεσης

(…συνέχεια)

- Αν A είναι το ενδεχόμενο μια πτήση να φτάσει νωρίτερα, τότε

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1000}{10000} = 0{,}1$$

- Αν B είναι το ενδεχόμενο μια πτήση να φτάσει αργότερα, τότε

$$\mathrm{P}(B) = \frac{750}{10000} = 0{,}075$$

- Η πιθανότητα μια πτήση να φτάσει νωρίτερα ή αργότερα είναι:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 0{,}1 + 0{,}075 = 0{,}175$$

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Ο κανόνας του συμπληρωματικού

- Ο κανόνας του συμπληρωματικού ορίζει ότι η πιθανότητα να συμβεί ένα ενδεχόμενο *A* προκύπτει αν αφαιρέσουμε την πιθανότητα να συμβεί το συμπληρωματικό ενδεχόμενο (δηλ. να μη συμβεί το *A*) από το ‘1’
- Αν $\mathrm{P}(A)$ είναι η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο *A* και $\mathrm{P}(\bar{A})$ η πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου του A, τότε

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{A}}) = \mathbf{1} \ \rightarrow \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{1} - \mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{A}})$$

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Ο κανόνας του συμπληρωματικού

(…συνέχεια Άσκησης – Παραδείγματος)

- Χρησιμοποιήστε το κανόνα του συμπληρωματικού για να βρείτε την πιθανότητα μια πτήση να φτάσει νωρίτερα (A) ή αργότερα (B)
  - Αν C είναι το ενδεχόμενο μια πτήση να φτάσει ακριβώς στην ώρα της, τότε

$$\mathrm{P}(C) = \frac{8000}{10000} = 0{,}8$$

  - Αν Dείναι το ενδεχόμενο μια πτήση να ακυρωθεί, τότε

$$\mathrm{P}(D) = \frac{250}{10000} = 0{,}025$$

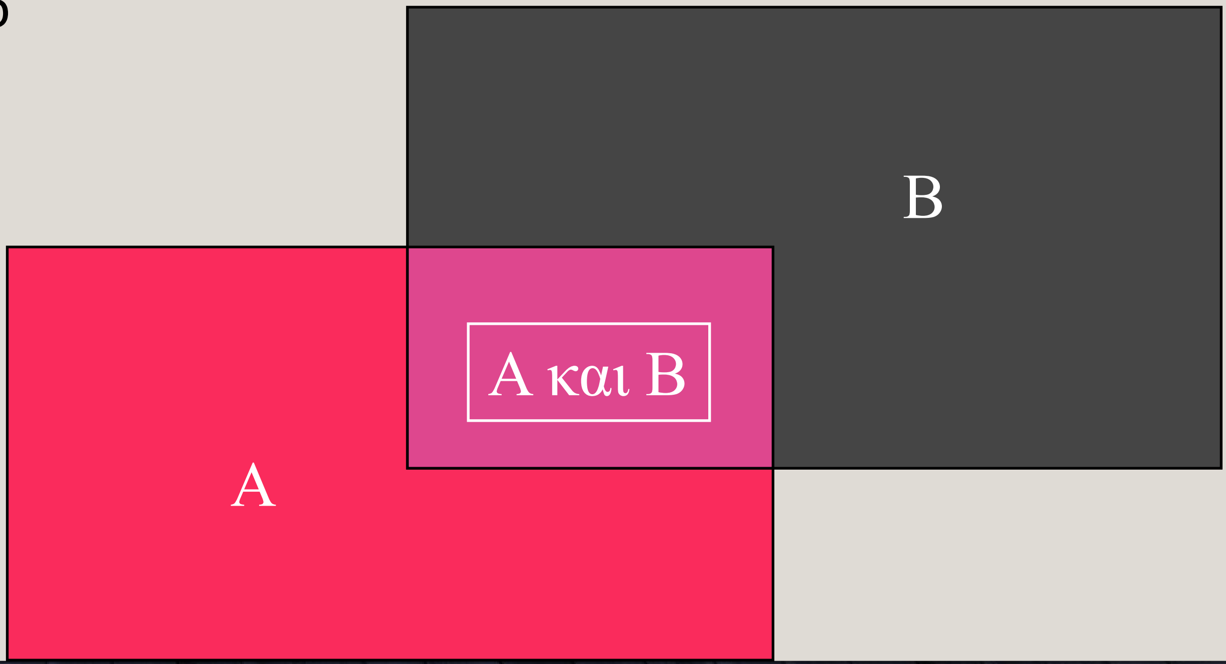
  - $\mathrm{P}(A \cup B) = 1 - \mathrm{P}(C \cup D) = 1 - (0{,}8 + 0{,}025) = 0{,}175$

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Ο γενικός κανόνας της πρόσθεσης

- Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα είτε αμοιβαίως αποκλειόμενα (ξένα) είτε όχι, τότε η πιθανότητα $\mathrm{P}(A \cup B)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{B}) - \mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$$

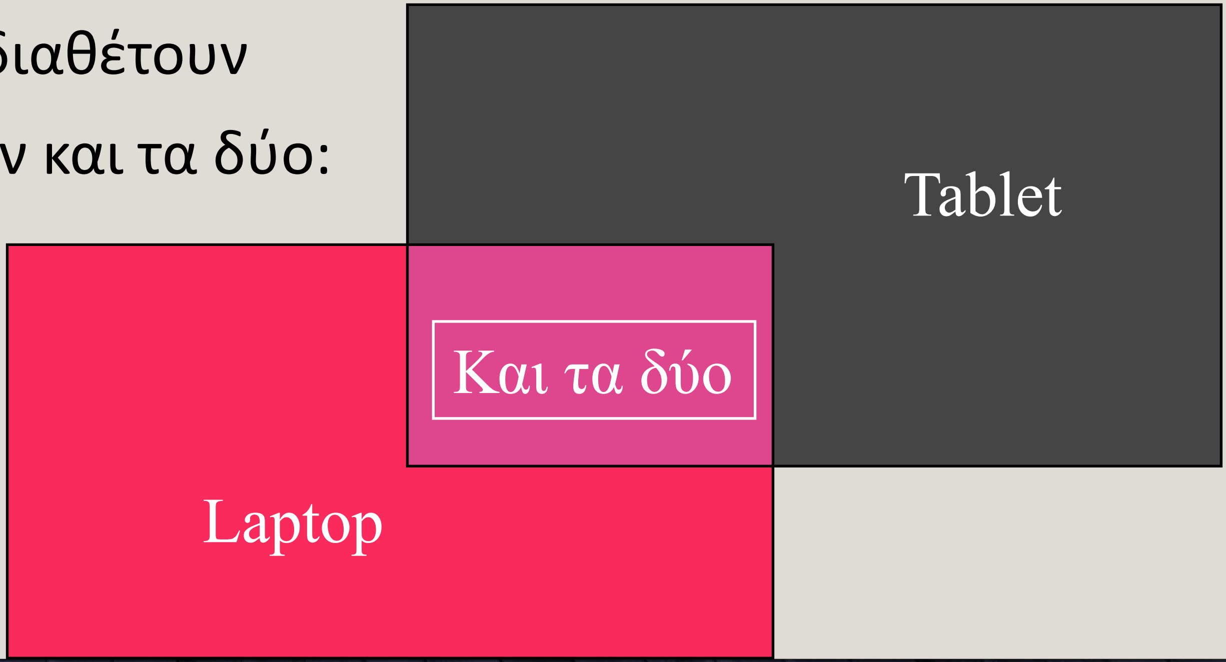
- *Σημείωση*: Η πιθανότητα $\mathrm{P}(A \cap B)$ συμβολίζεται και απλά ως $\mathrm{P}(AB)$
- Αναπαράσταση του κανόνα μέσω διαγράμματος Venn →



Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Ο γενικός κανόνας της πρόσθεσης

Άσκηση – Παράδειγμα

- Σε ένα δείγμα 1000 ατόμων, 640 δήλωσαν ότι διαθέτουν laptop, 350 δήλωσαν ότι διαθέτουν tablet και 200 δήλωσαν ότι διαθέτουν και τα δύο:



Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Ο γενικός κανόνας της πρόσθεσης

Λύση

- Αν ένα άτομο επιλεγεί τυχαία, ποια η πιθανότητα να διαθέτει laptop, η πιθανότητα να διαθέτει tablet και η πιθανότητα να διαθέτει και τα δύο;

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{L}) = \frac{\mathbf{640}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{0,64}$$

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{T}) = \frac{\mathbf{350}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{0,35}$$

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{L} \cap \boldsymbol{T}) = \frac{\mathbf{200}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{0,2}$$

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Ο γενικός κανόνας της πρόσθεσης

(…συνέχεια) Λύση

- Αν ένα άτομο επιλεγεί τυχαία, ποια η πιθανότητα να διαθέτει laptop ή tablet;

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{L} \cup \boldsymbol{T}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{L}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{T}) - \mathbf{P}(\boldsymbol{L} \cap \boldsymbol{T}) =$$

$$\frac{\mathbf{640}}{\mathbf{1000}} + \frac{\mathbf{350}}{\mathbf{1000}} - \frac{\mathbf{200}}{\mathbf{1000}} = \frac{\mathbf{790}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{0,79}$$

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Κοινή πιθανότητα

- Η **κοινή πιθανότητα** αφορά το ενδεχόμενο δύο ή περισσότερα γεγονότα να συμβούν ταυτόχρονα
- Ένα παράδειγμα είναι το ενδεχόμενο ένα άτομο να διαθέτει laptop και tablet ταυτόχρονα
- Κοινή πιθανότητα των ενδεχομένων A και B:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \text{ ή } \mathbf{P}(\boldsymbol{AB})$$

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων *Ειδικός κανόνας πολλαπλασιασμού*

- Ο **ειδικός κανόνας του πολλαπλασιασμού** προϋποθέτει δύο ενδεχόμενα να είναι **ανεξάρτητα** μεταξύ τους
- Δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, αν η εμφάνιση του ενός δεν έχει καμία επίδραση στην πιθανότητα εμφάνισης του άλλου
  - Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A})\mathbf{P}(\boldsymbol{B})$$

  - Όταν ένα σύνολο ενδεχομένων A_i είναι ανεξάρτητα, ισχύει ότι:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{\boldsymbol{\iota}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\iota}}\right) = \prod_{\boldsymbol{i}} \mathbf{P}(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}})$$

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων *Ειδικός κανόνας πολλαπλασιασμού*

Άσκηση – Παράδειγμα

- Ένας επενδυτής διαθέτει μετοχές από δύο εταιρείες: Apple (A) και Google (G)
- Έστω ότι η πιθανότητα η μετοχή της Apple να ανέβει στο τέλος του έτους είναι 60% και η πιθανότητα η μετοχή της Google αν ανέβει στο τέλος του έτους είναι 80%
- Θεωρήστε ότι οι δύο μετοχές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (σημείωση: στην πραγματικότητα υπάρχει ισχυρή εξάρτηση μεταξύ τέτοιων μετοχών)

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Βασικοί Κανόνες Πιθανοτήτων
Ειδικός κανόνας πολλαπλασιασμού

Λύση

- Ποια η πιθανότητα να αυξήσουν και οι δύο μετοχές την αξία τους στο τέλος του έτους;

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{G}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A})\mathbf{P}(\boldsymbol{G}) = \mathbf{0,6} \times \mathbf{0,8} = \mathbf{0,48} = \mathbf{48\%}$$

- Ποια η πιθανότητα να αυξήσει τουλάχιστον μία από τις δύο μετοχές την αξία της στο τέλος του έτους;

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{G}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{G}) - \mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{G}) = \mathbf{0,6} + \mathbf{0,8} - \mathbf{0,48} = \mathbf{0,92} = \mathbf{92\%}$$

  - Προσπαθήστε να βρείτε τη λύση και με χρήση του συμπληρωματικού, αλλά και με τον ειδικό κανόνα της πρόσθεσης

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Δεσμευμένη Πιθανότητα

- **Δεσμευμένη πιθανότητα** είναι η πιθανότητα να συμβεί ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο, δεδομένου ότι έχει συμβεί κάποιο άλλο ενδεχόμενο
- Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A δεδομένου ότι έχει συμβεί το ενδεχόμενο B συμβολίζεται ως:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα
Γενικός κανόνας πολλαπλασιασμού

- Ο **γενικός κανόνας πολλαπλασιασμού** χρησιμοποιείται για την εύρεση της κοινής πιθανότητας δύο ενδεχομένων να συμβούν (ταυτόχρονα)
- Ορίζει ότι για δύο ενδεχόμενα A και B η κοινή πιθανότητα να συμβούν και τα δύο βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας την πιθανότητα το A να συμβεί επί την πιθανότητα να συμβεί το B, δεδομένου ότι έχει συμβεί το A

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A})\mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) \text{ ή } \mathbf{P}(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{B})\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$$

- <u>Σημείωση</u>: Αυτή είναι η γενική περίπτωση και δεν προϋποθέτει τα ενδεχόμενα A και B να είναι ανεξάρτητα

Δεσμευμένη Πιθανότητα *Γενικός κανόνας πολλαπλασιασμού*

- Από τον γενικό κανόνας πολλαπλασιασμού προκύπτει άμεσα ο τύπος υπολογισμού της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})}{\mathbf{P}(\boldsymbol{A})}$$

ή

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A})}{\mathbf{P}(\boldsymbol{B})}$$

- Τα ενδεχόμενα A και B είναι **ανεξάρτητα** μεταξύ τους αν και μόνο αν:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) \text{ ή } \mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{B})$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα *Γενικός κανόνας πολλαπλασιασμού*

Άσκηση – Παράδειγμα

- Έστω ένα νέο εμβόλιο που υπόκειται σε κλινικές δοκιμές και έχει τα ακόλουθα αποτελέσματα:

	Γυναίκες	Άνδρες
Αποτελεσματικό	100	900
Αναποτελεσματικό	900	100

- Δείξτε αναλυτικά αν η αποτελεσματικότητα του εμβολίου εξαρτάται από το φύλο του υποκειμένου

26 Δεσμευμένη Πιθανότητα
Γενικός κανόνας πολλαπλασιασμού

Λύση

- Πιθανότητα το εμβόλιο να είναι αποτελεσματικό (ενδεχόμενο A) ανεξαρτήτως φύλου:
  $\mathrm{P}(A) = \frac{100+900}{100+900+100+900} = \frac{1000}{2000} = 0,5$
- Πιθανότητα το εμβόλιο να είναι αποτελεσματικό (ενδεχόμενο A) δεδομένου ότι το υποκείμενο είναι άνδρας (ενδεχόμενο M): $\mathrm{P}(A|M) = \frac{900}{100+900} = \frac{900}{1000} = 0,9$
- Πιθανότητα το εμβόλιο να είναι αποτελεσματικό (ενδεχόμενο A) δεδομένου ότι το υποκείμενο είναι γυναίκα (ενδεχόμενο F): $\mathrm{P}(A|F) = \frac{100}{100+900} = \frac{100}{1000} = 0,1$
- $\mathrm{P}(A) \neq \mathrm{P}(A|M) \neq \mathrm{P}(A|F)$ → Η αποτελεσματικότητα του εμβολίου <u>ΔΕΝ</u> είναι ανεξάρτητη από το φύλο του υποκειμένου

Δεσμευμένη Πιθανότητα
Γενικός κανόνας πολλαπλασιασμού

Άσκηση – Παράδειγμα

- Ένα Πανεπιστήμιο έχει συλλέξει τα παρακάτω δεδομένα για τους φοιτητές του:

ΤΜΗΜΑ	Άνδρες	Γυναίκες	ΣΥΝΟΛΟ
Λογιστικής	170	110	280
Φυσικής	120	100	220
Πληροφορικής	160	70	230
Χημείας	150	120	270
ΣΥΝΟΛΟ	600	400	1000

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Δεσμευμένη Πιθανότητα
Γενικός κανόνας πολλαπλασιασμού

Λύση

- Αν ένας φοιτητής επιλεγεί τυχαία, ποια η πιθανότητα να πρόκειται για γυναίκα (F) και να σπουδάζει Λογιστική (A);
  - $\mathrm{P}(F \cap A) = \frac{110}{1000} = 0{,}11$
- Δεδομένου ότι πρόκειται για φοιτήτρια, ποια η πιθανότητα αυτή να σπουδάζει Λογιστική (A);
  - $\mathrm{P}(A|F) = \frac{\mathrm{P}(A \cap F)}{\mathrm{P}(F)} = \frac{0{,}11}{400/1000} = 0{,}275$ (ή ισοδύναμα $\frac{110}{400} = 0{,}275$)

Δεσμευμένη Πιθανότητα
Κανόνας Bayes

- Ο **κανόνας Bayes** συσχετίζει την δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$ με την δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow \mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})\mathbf{P}(\boldsymbol{B})}{\mathbf{P}(\boldsymbol{A})}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα
Δέντρο πιθανοτήτων

- Ένα **δέντρο πιθανοτήτων** βοηθάει στην αναπαράσταση των δεσμευμένων και κοινών πιθανοτήτων
- Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την ανάλυση λήψης αποφάσεων που περιλαμβάνουν πολλαπλά στάδια (δέντρο αποφάσεων)

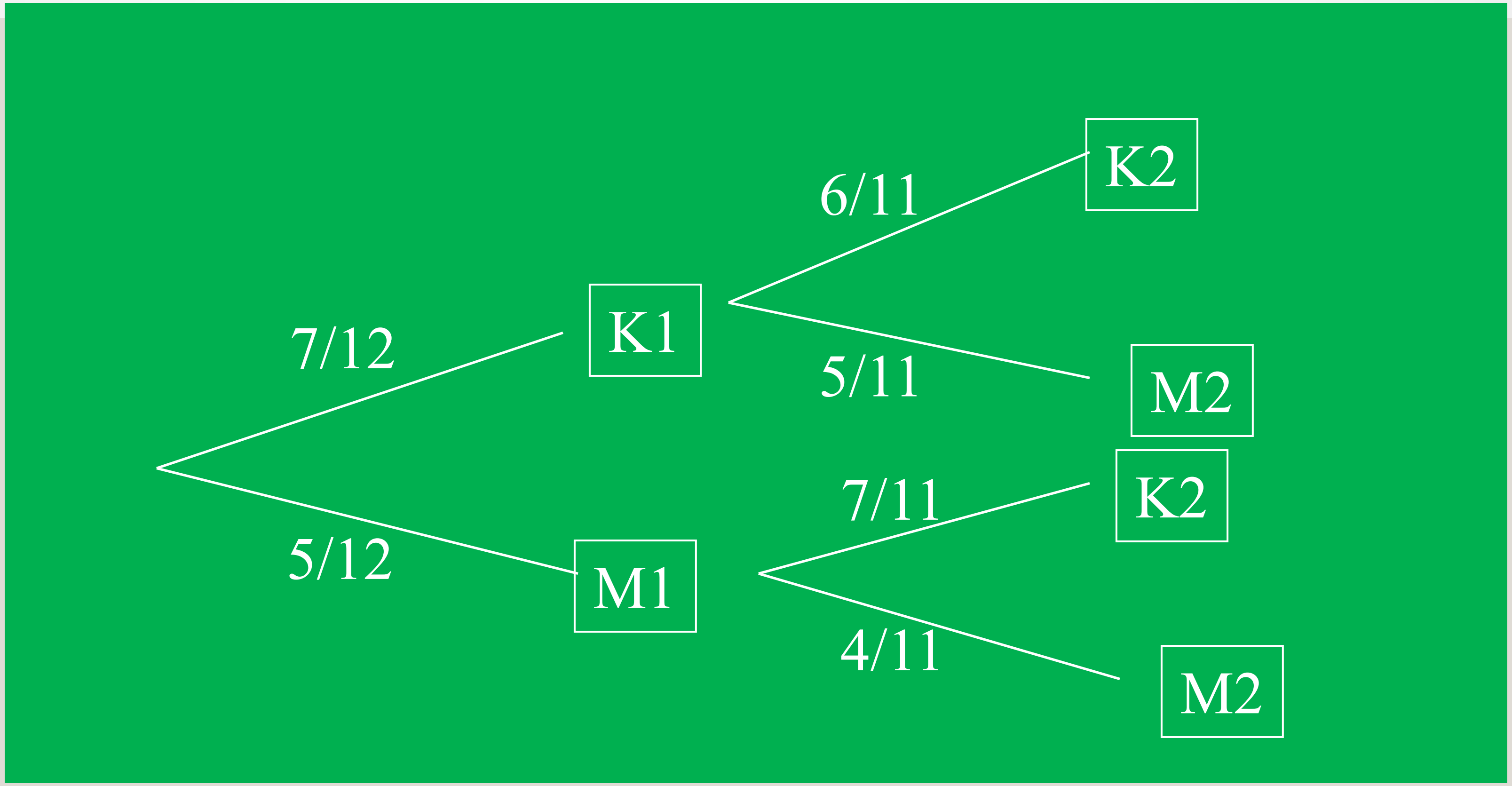
Δεσμευμένη Πιθανότητα
Δέντρο πιθανοτήτων

Άσκηση - Παράδειγμα

- Ένας σάκος περιέχει 7 κόκκινες μπάλες και 5 μπλε μπάλες
- Επιλέγουμε 2 μπάλες, τη μία μετά την άλλη, χωρίς επανατοποθέτηση
- Δημιουργήστε το αντίστοιχο δέντρο πιθανοτήτων
- Ποια η πιθανότητα οι μπάλες τελικά που θα επιλέξουμε να είναι διαφορετικού χρώματος;

Δεσμευμένη Πιθανότητα
Δέντρο πιθανοτήτων

Λύση



Δεσμευμένη Πιθανότητα
Δέντρο πιθανοτήτων

(…συνέχεια) Λύση

- $\mathrm{P}(M|K) = \mathrm{P}(K1 \cap M2|K1) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{35}{132} \approx 0{,}265$
- $\mathrm{P}(K|M) = \mathrm{P}(M1 \cap K2|M1) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{35}{132} \approx 0{,}265$
- Άρα η ζητούμε πιθανότητα είναι: $\mathrm{P}(M|K) + \mathrm{P}(K|M) = 0{,}265 + 0{,}265 = 0{,}53$