ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ II

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

2 Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

- Πολλά πραγματικά προβλήματα, όταν διατυπώνονται με μαθηματικό τρόπο, οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις
- Στα «Μαθηματικά Ι», αναφερθήκαμε σε διαφορικές εξισώσεις της μορφής $dy/dx = f(x)$, όπου η f δίνεται και το y είναι μια άγνωστη συνάρτηση του x
- Μάθαμε ότι, όταν η f είναι σταθερή σε κάποιο διάστημα, η γενική λύση $y(x)$ βρίσκεται απευθείας με ολοκλήρωση, $y = \int f(x)dx$
- Επίσης, διερευνήσαμε διαφορικές εξισώσεις της μορφής $dy/dx = f(x, y)$, όπου η f είναι συνάρτηση και της ανεξάρτητης μεταβλητής x και της εξαρτημένης μεταβλητής y
- Εκεί μάθαμε πώς βρίσκουμε τη γενική λύση για την ειδική περίπτωση όπου η διαφορική εξίσωση είναι διαχωρίσιμη
- Εδώ, επεκτείνουμε περαιτέρω τη μελέτη μας για να συμπεριλάβουμε και άλλες συχνά εμφανιζόμενες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης
- Αυτές περιέχουν μόνο πρώτες παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης $y(x)$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

3 Λύσεις και Μέθοδος του Euler

Γενικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και οι λύσεις τους

- Πολλά πραγματικά προβλήματα, όταν διατυπώνονται με μαθηματικό τρόπο, οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις
- **Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης** είναι μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

όπου $f(x, y)$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών που ορίζεται σε ένα χωρίο του επιπέδου xy

- Η εξίσωση είναι πρώτης τάξης διότι περιέχει μόνο την πρώτη παράγωγο dy/dx (και όχι παραγώγους μεγαλύτερης τάξης)
- Σε μια τυπική κατάσταση, το y αναπαριστά μια άγνωστη συνάρτηση του x, ενώ η $f(x, y)$ είναι γνωστή συνάρτηση

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

4 Λύσεις και Μέθοδος του Euler

Γενικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και οι λύσεις τους

- Παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης είναι οι εξισώσεις: $y' = x + y$, $y' = y/x$ και $y' = 3xy$
- Σε όλες τις περιπτώσεις, θα πρέπει να θεωρούμε το y ως μια άγνωστη συνάρτηση του x, η παράγωγος της οποίας δίνεται από την $f(x, y)$
- Οι εξισώσεις $y' = f(x, y)$ και $\frac{d}{dx}y = f(x, y)$ είναι ισοδύναμες με την αρχική εξίσωση και στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τις τρεις αυτές μορφές εναλλακτικά
- Λύση της εξίσωσης είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $y = y(x)$ ορισμένη σε ένα διάστημα I τιμών του x (ενδεχομένως άπειρο), τέτοια ώστε να ισχύει στο εν λόγω διάστημα

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

- Η **γενική λύση** μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι μια λύση που περιέχει όλες τις πιθανές λύσεις
- Η γενική λύση περιέχει πάντα μια αυθαίρετη σταθερά, αλλά μια λύση που έχει αυτή την ιδιότητα δεν είναι απαραίτητα η γενική λύση
- Δηλαδή, μια λύση μπορεί να περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά χωρίς να είναι η γενική λύση

5 Λύσεις και Μέθοδος του Euler
Γενικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και οι λύσεις τους

Άσκηση – Παράδειγμα

- Δείξτε ότι κάθε μέλος της οικογένειας συναρτήσεων $y = \frac{C}{x} + 2$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$ στο διάστημα $(0, \infty)$, όπου C τυχούσα σταθερά

<u>Λύση</u>

- Παραγωγίζοντας την $y = \frac{C}{x} + 2$, παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + 0 = -\frac{C}{x^2}$$

- Χρειάζεται να δείξουμε ότι η διαφορική εξίσωση ικανοποιείται με αντικατάσταση:

$$-\frac{C}{x^2} = \frac{1}{x}\left(2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right)$$

η οποία επαληθεύεται αμέσως αν εκτελέσουμε τις πράξεις

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

6

Λύσεις και Μέθοδος του Euler

Γενικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και οι λύσεις τους

- Όπως κάναμε στην εύρεση αντιπαραγώγων, συχνά χρειαζόμαστε μια συγκεκριμένη λύση αντί της γενικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης $y' = f(x, y)$
- Η ειδική λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ είναι η λύση $y = y(x)$ της οποίας η τιμή ισούται με y_0 όταν $x = x_0$
- Κατά συνέπεια, η γραφική παράσταση της ειδικής λύσης διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) στο επίπεδο xy
- Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξης καθορίζεται από μια διαφορική εξίσωση $y' = f(x, y)$ της οποίας η λύση πρέπει να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

7 Λύσεις και Μέθοδος του Euler

Γενικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και οι λύσεις τους

Άσκηση – Παράδειγμα

- Δείξτε ότι η συνάρτηση $y = (x+1) - \frac{1}{3}e^x$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών πρώτης τάξης $\frac{dy}{dx} = y - x$, $y(0) = \frac{2}{3}$

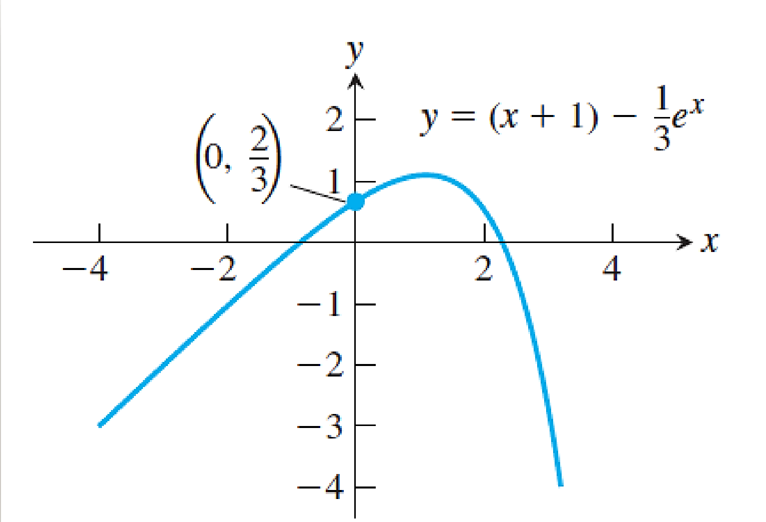
<u>Λύση</u>

- Η εξίσωση $\frac{dy}{dx} = y - x$ είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με $f(x,y) = y - x$
- Στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 1 - \frac{1}{3}e^x, \qquad y - x = (x+1) - \frac{1}{3}e^x - x = 1 - \frac{1}{3}e^x$$

- Η συνάρτηση ικανοποιεί την αρχική συνθήκη διότι:

$$y(0) = \left[(x+1) - \frac{1}{3}e^x\right]_{x=0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



Λύσεις και Μέθοδος του Euler

Μέθοδος του Euler

- Αν δεν είναι απαραίτητο ή δεν μπορούμε να βρούμε αμέσως μια ακριβή λύση που να είναι εκφρασμένη με έναν αναλυτικό μαθηματικό τύπο, για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$, μπορούμε συχνά να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστή για να παραγάγουμε έναν πίνακα προσεγγιστικών αριθμητικών τιμών του y για τιμές του x σε κάποιο κατάλληλο διάστημα
- Ένας, τέτοιος πίνακας ονομάζεται **αριθμητική λύση** του προβλήματος, και η μέθοδος με την οποία τον κατασκευάζουμε ονομάζεται **αριθμητική μέθοδος**
- Αν μας δοθεί μια διαφορική εξίσωση $dy/dx = f(x, y)$ και μια αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση $y = y(x)$ με τη γραμμικοποίησή της:

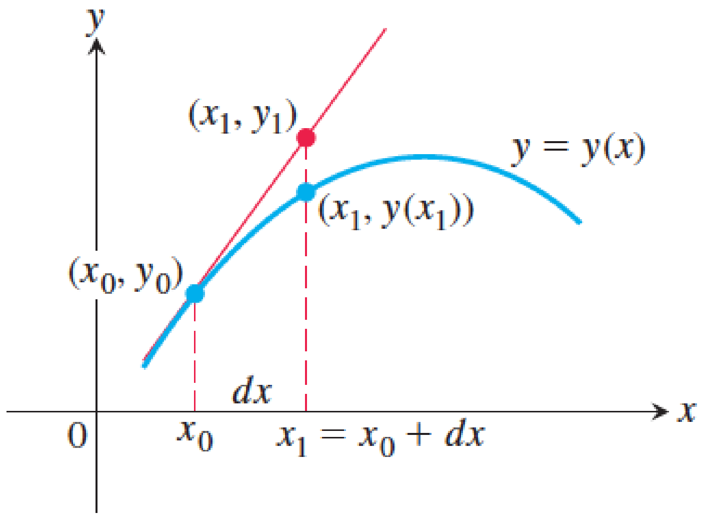
$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \ \rightarrow L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

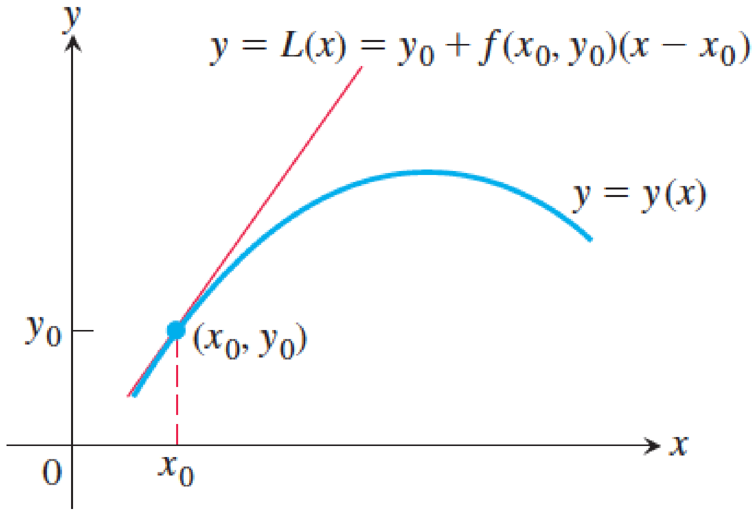
Λύσεις και Μέθοδος του Euler

Μέθοδος του Euler

- Η συνάρτηση $L(x)$ αποτελεί καλή προσέγγιση της λύσης $y(x)$ σε ένα μικροσύστημα γύρω από το x_0
- Η ουσία της μεθόδου του Euler είναι να «συνδέει» μια ακολουθία από διαδοχικές γραμμικοποιήσεις έτσι ώστε να προσεγγίσει τελικά μια καμπύλη σε μεγαλύτερο διάστημα
- Γνωρίζουμε ότι το σημείο (x_0, y_0) ανήκει στην καμπύλη λύσης
- Έστω ότι καθορίζουμε μια νέα τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, την $x_1 = x_0 + dx$, τότε μια καλή προσέγγιση της τιμής της λύσης $y = y(x_1)$ είναι:

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)dx$$

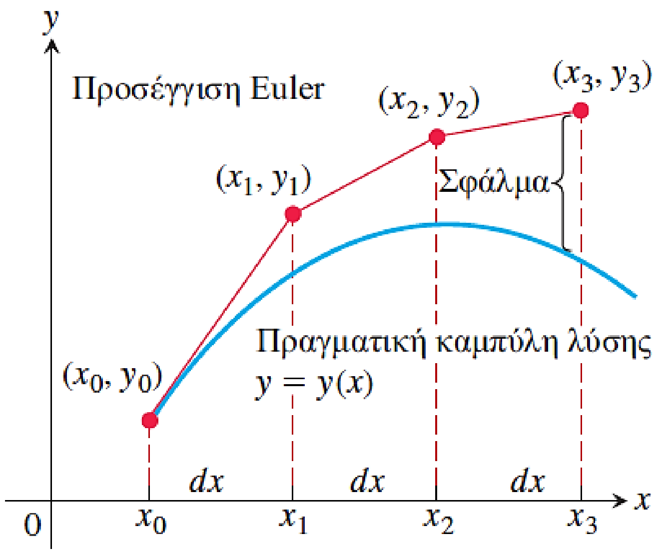




Λύσεις και Μέθοδος του Euler

Μέθοδος του Euler

- Χρησιμοποιώντας το σημείο (x_1, y_1) και την κλίση $f(x_1, y_1)$ της καμπύλης λύσης που διέρχεται από το (x_1, y_1), κάνουμε το δεύτερο βήμα
- Θέτουμε $x_2 = x_1 + dx$ και χρησιμοποιούμε τη γραμμικοποίηση της καμπύλης λύσης που διέρχεται από το (x_1, y_1) για να υπολογίσουμε το $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)dx$
- Αυτό δίνει την επόμενη προσέγγιση (x_2, y_2) σε τιμές κατά μήκος της καμπύλης λύσης $y = y(x)$
- Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κάνουμε το τρίτο βήμα από το σημείο (x_2, y_2) με κλίση $f(x_2, y_2)$ για να πάρουμε την τρίτη προσέγγιση:
$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)dx$$
- Στην πράξη, το dx είναι αρκούντως μικρό ώστε να κάνει την κόκκινη καμπύλη να «αγκαλιάζει» τη γαλάζια, δίνοντας παντού μια καλή προσέγγιση της λύσης



Σχημα 9.7 Τρία βήματα της προσέγγισης Euler στη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Καθώς κάνουμε περισσότερα βήματα, τα αντίστοιχα σφάλματα συνήθως συσσωρεύονται, όχι όμως στον υπερβολικό βαθμό που φαίνεται στο σχήμα.

Λύσεις και Μέθοδος του Euler
Μέθοδος του Euler

Άσκηση – Παράδειγμα

- Βρείτε τις πρώτες τρεις προσεγγίσεις y_1, y_2, y_3 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler για το πρόβλημα αρχικών τιμών: $y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$, ξεκινώντας από το $x_0 = 0$ με $dx = 0{,}1$

Λύση

- Έχουμε τις τιμές εκκίνησης $x_0 = 0$ και $y_0 = 1$
- Έπειτα προσδιορίζουμε τις τιμές του x όπου θα γίνουν οι προσεγγίσεις Euler: $x_1 = x_0 + dx = 0{,}1$, $x_2 = x_0 + 2dx = 0{,}2$ και $x_3 = x_0 + 3dx = 0{,}3$. Βρίσκουμε τότε:
  - Πρώτη: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)dx = y_0 + (1 + y_0)dx = 1 + (1 + 1)0{,}1 = 1{,}2$
  - Δεύτερη: $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)dx = y_1 + (1 + y_1)dx = 1{,}2 + (1 + 1{,}2)0{,}1 = 1{,}42$
  - Τρίτη: $y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)dx = y_2 + (1 + y_2)dx = 1{,}42 + (1 + 1{,}42)0{,}1 = 1{,}662$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

- Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι **γραμμική** όταν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

όπου τα P και Q είναι συνεχείς συναρτήσεις του x

- Η Εξίσωση αποτελεί την **πρότυπη μορφή** της γραμμικής εξίσωσης
- Η εξίσωση $dy/dx = ky$, που περιγράφει την εκθετική μεταβολή, μπορεί να γραφτεί στην πρότυπη μορφή

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0$$

- συνεπώς είναι γραμμική με $P(x) = -k$ και $Q(x) = 0$
- Η Εξίσωση είναι *γραμμική* (ως προς y) διότι το y και η παράγωγός του, dy/dx, εμφανίζεται μόνο στην πρώτη δύναμη, δεν πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους, ούτε εμφανίζονται ως όρισμα κάποιας άλλης συνάρτησης (όπως οι $\sin y$, e^y, ή $\sqrt{dy/dx}$)

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Άσκηση – Παράδειγμα

- Γράψτε την ακόλουθη εξίσωση σε πρότυπη μορφή

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0$$

<u>Λύση</u>

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3}{x}y$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x$$

- Προσέξτε ότι το $P(x)$ είναι το $-3/x$, και όχι το $+3/x$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Επίλυση γραμμικών εξισώσεων

- Επιλύουμε την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με μια θετική συνάρτηση $v(x)$ που τρέπει το αριστερό μέλος στην παράγωγο του γινομένου $v(x) \cdot y$

- Θα δείξουμε σε λίγο πώς βρίσκουμε την v, αλλά πρώτα ας δούμε πώς, από τη στιγμή που την έχουμε βρει, μας παρέχει τη ζητούμενη λύση

- Δείτε γιατί δουλεύει ο πολλαπλασιασμός με $v(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \;\rightarrow\; v(x)\frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y = v(x)Q(x) \rightarrow$$

Η $v(x)$ έχει επιλεγεί ώστε να σχηματιστεί το $v\frac{dy}{dx} + Pvy = \frac{d}{dx}(v \cdot y)$

$$\frac{d}{dx}(v(x) \cdot y) = v(x)Q(x) \;\rightarrow\; v(x) \cdot y = \int v(x)Q(x)dx \;\rightarrow y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)dx$$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Επίλυση γραμμικών εξισώσεων

- Η τελευταία εξίσωση εκφράζει τη λύση της αρχικής εξίσωσης μέσω των συναρτήσεων $\upsilon(x)$ και $Q(x)$
- Η $\upsilon(x)$ ονομάζεται ολοκληρωτικός παράγοντας, διότι με την παρουσία της η εξίσωση γίνεται ολοκληρώσιμη
- Γιατί δεν εμφανίζεται και το $P(x)$ στη λύση; Εμφανίζεται, αλλά έμμεσα, στην κατασκευή της θετικής συνάρτησης $\upsilon(x)$. Πράγματι, έχουμε:

$$\frac{d}{dx}(\upsilon \cdot y) = \upsilon\frac{dy}{dx} + P\upsilon y \to \ \upsilon\frac{dy}{dx} + y\frac{d\upsilon}{dx} = \upsilon\frac{dy}{dx} + P\upsilon y \to y\frac{d\upsilon}{dx} = P\upsilon y \to$$

$$\frac{d\upsilon}{dx} = P\upsilon \ \to \frac{d\upsilon}{\upsilon} = Pdx \ \to \int\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int Pdx \ \to \ \ln \upsilon = \int Pdx \ \to \ e^{\ln \upsilon} = e^{\int Pdx} \ \to \ \upsilon = e^{\int Pdx}$$

- **Οπότε, για να λύσουμε τη γραμμική εξίσωση $y' + P(x)y = Q(x)$, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\upsilon(x) = e^{\int P(x)dx}$ και ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη**

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Επίλυση γραμμικών εξισώσεων

Άσκηση – Παράδειγμα

- Λύστε την εξίσωση

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0$$

<u>Λύση</u>

- Αρχικά φέρνουμε την εξίσωση στην πρότυπη μορφή (οπότε αναγνωρίζουμε $P(x) = -3/x$)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x$$

- Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι:

$$\upsilon(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int(-3/x)dx} = e^{-3\ln|x|} = e^{-3\ln x} = e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}$$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης
Επίλυση γραμμικών εξισώσεων

(…συνέχεια) Λύση

- Έπειτα πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πρότυπης μορφής με $\upsilon(x)$ ολοκληρώνουμε:

$$\frac{1}{x^3}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y\right)=\frac{1}{x^3}x \rightarrow \frac{dy}{x^3dx}-\frac{3}{x^4}y=\frac{1}{x^2} \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right)=\frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{x^3}y=\int\frac{1}{x^2}dx \rightarrow \frac{1}{x^3}y=-\frac{1}{x}+C$$

- Η επίλυση της τελευταίας αυτής εξίσωσης ως προς y δίνει τη γενική λύση:

$$y=x^3\left(-\frac{1}{x}+C\right)=-x^2+Cx^3, \qquad x>0$$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης
Επίλυση γραμμικών εξισώσεων

Άσκηση – Παράδειγμα

- Βρείτε την ειδική λύση της $3xy' - y = \ln x + 1, \quad x > 0$, που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(1) = -2$

<u>Λύση</u>

- Με $x > 0$, γράφουμε την εξίσωση στην πρότυπη μορφή: $y' - \frac{1}{3x}y = \frac{\ln x + 1}{3x}$
- Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι:
  $\upsilon(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int(-1/3x)dx} = e^{(-1/3)\ln|x|} = e^{(-1/3)\ln x} = e^{\ln x^{(-1/3)}} = x^{(-1/3)}, \qquad x > 0$
- Οπότε ισχύει:

$$y' - \frac{1}{3x}y = \frac{\ln x + 1}{3x} \rightarrow x^{-\frac{1}{3}}y' - \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{3x}y = x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\ln x + 1}{3x}\right) \rightarrow x^{-\frac{1}{3}}y = \frac{1}{3}\int (\ln x + 1)x^{-\frac{4}{3}}\,dx$$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Επίλυση γραμμικών εξισώσεων

<u>(...συνέχεια) Λύση</u>

- Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, το δεξί μέλος γίνεται:

$$\frac{1}{3}\int (\ln x + 1)x^{-\frac{4}{3}}\,dx = \frac{1}{3}\int (\ln x + 1)\left(\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}\right)' dx = \frac{1}{3}\int (\ln x + 1)\left(-3x^{-\frac{1}{3}}\right)' dx =$$

$$-\int (\ln x + 1)\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' dx = -x^{-\frac{1}{3}}(\ln x + 1) + \int \frac{1}{x}x^{-\frac{1}{3}}dx + C = -x^{-\frac{1}{3}}(\ln x + 1) + \int x^{-\frac{4}{3}}dx + C = -x^{-\frac{1}{3}}(\ln x + 1) + \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + C$$

$$= -x^{-\frac{1}{3}}(\ln x + 1) - 3x^{-\frac{1}{3}} + C$$

- Επομένως η εξίσωση γίνεται: $x^{-\frac{1}{3}}y = -x^{-\frac{1}{3}}(\ln x + 1) - 3x^{-\frac{1}{3}} + C \to y = -(\ln x + 1) - 3 + Cx^{\frac{1}{3}} \to y = -\ln x - 4 + Cx^{\frac{1}{3}}$
- Για $x = 1$ και $y = -2$: $-2 = -\ln 1 - 4 + C \to C = 2$
- Αντικαθιστώντας, προκύπτει η ειδική λύση: $\boldsymbol{y = -\ln x - 4 + 2x^{\frac{1}{3}}}$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Επίλυση γραμμικών εξισώσεων

- Όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, δεν χρειάζεται να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης αφού πρώτα πολλαπλασιάσουμε το καθένα με τον ολοκληρωτικό παράγοντα, αν θυμηθούμε ότι το αριστερό μέλος ολοκληρώνεται πάντα προς το γινόμενο $\upsilon(x) \cdot y$ του ολοκληρωτικού παράγοντα επί τη συνάρτηση λύσης
- Αυτό σημαίνει ότι: $\upsilon(x)y = \int \upsilon(x)Q(x)dx$
- Χρειάζεται δηλαδή μόνο να ολοκληρώσουμε το γινόμενο του ολοκληρωτικού παράγοντα $\upsilon(x)$ με το $Q(x)$ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης και έπειτα να εξισώσουμε το αποτέλεσμα με το $\upsilon(x)y$ για να πάρουμε τη γενική λύση
- Ωστόσο, για να δώσουμε έμφαση στον ρόλο της $\upsilon(x)$ στη διαδικασία επίλυσης, μερικές φορές ακολουθούμε την πλήρη διαδικασία
- Παρατηρήστε ότι, αν η συνάρτηση $Q(x)$ είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν στην πρότυπη μορφή, η γραμμική εξίσωση είναι διαχωρίσιμη, οπότε και λύνεται απλά:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \;\rightarrow\; \frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Διαφορική εξίσωση Bernoulli

- Μια διαφορική εξίσωση **Bernoulli** είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

- Παρατηρήστε ότι, αν $n = 0$ ή 1, η εξίσωση Bernoulli είναι γραμμική
- Για άλλες τιμές του n, η αντικατάσταση $u = y^{1-n}$ μετατρέπει την εξίσωση Bernoulli σε γραμμική

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης
Διαφορική εξίσωση Bernoulli

- Παραδείγματός χάριν, στην εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^2$$

έχουμε $n = 2$, έτσι ώστε $u = y^{1-2} = y^{-1} \rightarrow \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2\frac{du}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx}$

- Τότε Η αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση δίνει

$$-u^{-2}\frac{du}{dx} - u^{-1} = e^{-x}u^{-2} \rightarrow \frac{du}{dx} + u = -e^{-x}$$

- Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι γραμμική ως προς την (άγνωστη) εξαρτημένη μεταβλητή u