

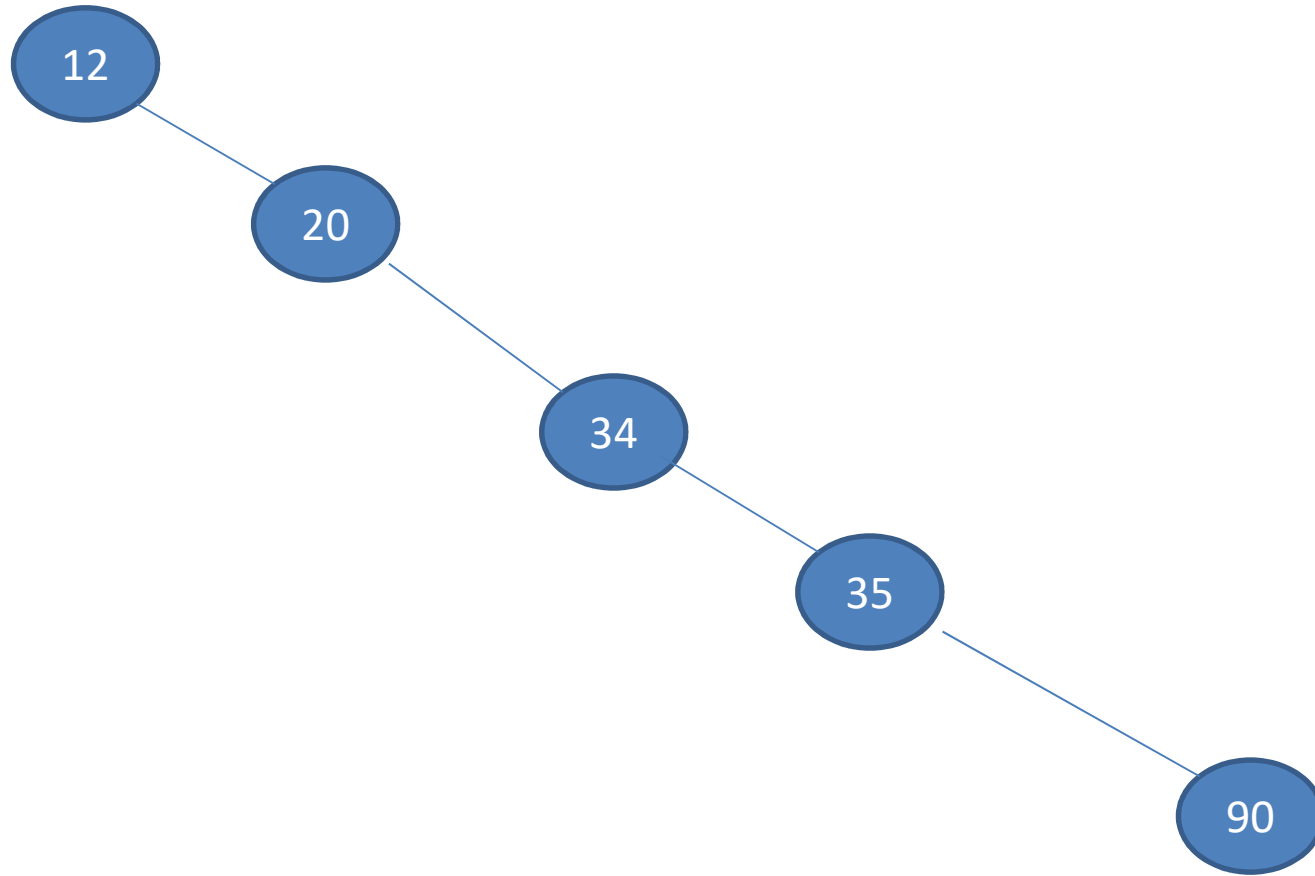
Περιεχόμενα

- Εισαγωγή
- Δένδρα AVL
- Δένδρα IPR
- B-Δένδρα

Εισαγωγή

❖ Η μορφή ενός δυαδικού δένδρου εξαρτάται από την σειρά εισαγωγής των κλειδιών. Ακόμη και αν κατασκευαστεί αρχικά ένα πλήρες δένδρο, είναι δυνατόν το δένδρο αυτό να εκφυλιστεί σε λίστα, μέσω εισαγωγών και διαγραφών που ενδέχεται να εφαρμοστούν στο δένδρο. Με τον τρόπο αυτό η πολυπλοκότητα αναζήτησης φθίνει από **$O(\log n)$** σε **$O(n)$** .

❖ Συνεπώς, μετά από κάθε λειτουργία εισαγωγής ή διαγραφής η μορφή ενός δένδρου πρέπει να παραμένει όσο το δυνατό πλησιέστερα προς τη μορφή ενός σχεδόν πλήρους δυαδικού δένδρου. Δηλ. να είναι **ισοζυγισμένο** ή **ισορροπημένο** (balanced).



Δένδρα AVL

Τα δένδρα αυτά είναι γνωστά ως δένδρα AVL, από τα αρχικά των ονομάτων αυτών που τα πρότειναν (Adelso-Velskii and Landis). Πρόκειται για τα δένδρα τα οποία μπορούν να εγγυηθούν ύψος $O(\log n)$ στην χειρότερη περίπτωση.

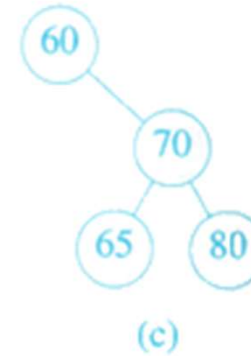
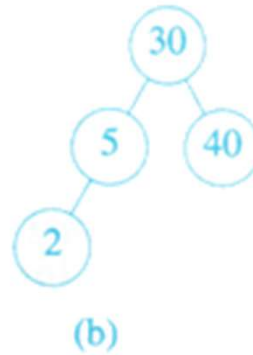
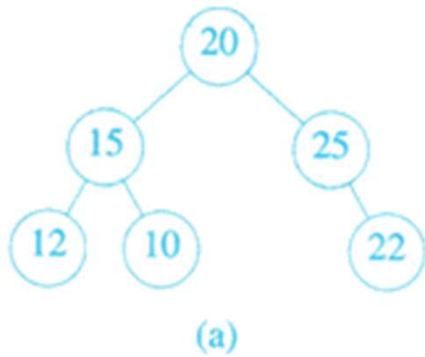
❖ Ορισμός

Ένα κενό δυαδικό δένδρο είναι ένα δένδρο **AVL**. Αν **T** είναι ένα μη κενό δένδρο με T_L και T_R το αριστερό και το δεξιό υποδένδρο του, τότε το **T** είναι ένα δένδρο **AVL** αν : (1) τα T_L και T_R είναι δένδρα **AVL** και (2) $|h_L - h_R| \leq 1$ όπου h_L και h_R είναι τα ύψη των δένδρων T_L και T_R αντίστοιχα.

❖ Για να διευκολυνθεί η εισαγωγή και διαγραφή κόμβων από ένα AVL δένδρο, ορίζεται ένας **παράγοντας ισορροπίας** $bf = h_L - h_R$, ο οποίος σε ένα ισορροπημένο δένδρο παίρνει τιμές $\{-1, 0, 1\}$.

Δένδρα AVL

Παράδειγμα 1:



Τα (α),(β) είναι AVL.

Το (α) δεν είναι δένδρο αναζήτησης AVL.

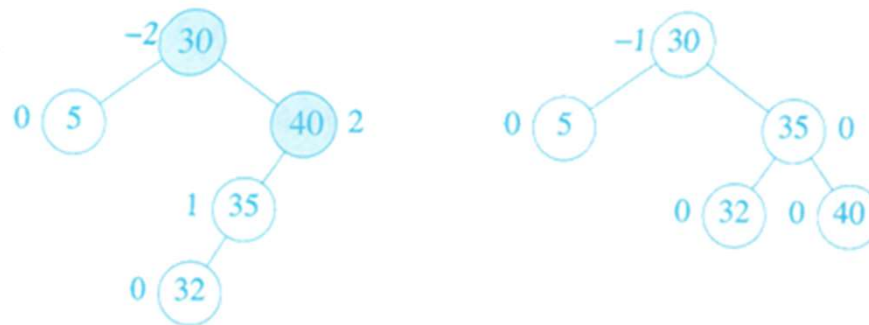
Το (β) είναι δένδρο αναζήτησης AVL.

Δένδρα AVL

Παράδειγμα 2:



Έστω εισάγουμε έναν κόμβο με κλειδί 32. Τότε ο δένδρο θα πάρει τη μορφή:



Δένδρα AVL

❖ Ισχύουν τα εξής:

1. Σε ένα μη ισοζυγισμένο δένδρο, οι παράγοντες ισορροπίας είναι $-2, -1, 0, 1, 2$.
2. Ένας κόμβος με παράγοντα ισορροπίας 2 είχε παράγοντα ισορροπίας 1 πριν την εισαγωγή, κτλ.
3. Μόνο οι παράγοντες ισορροπίας των κόμβων στο μονοπάτι από τη ρίζα προς το νεοεισερχόμενο κόμβο μπορούν να αλλάξουν ως αποτέλεσμα της εισαγωγής.
4. Έστω A ο κοντινότερος πρόγονος του νεοεισελθόντος κόμβου του οποίου ο παράγοντας ισορροπίας είναι -2 ή 2 . Ο παράγοντας ισορροπίας των κόμβων στο μονοπάτι από το A στο νέοεισελθόντα κόμβο ήταν 0 πριν την εισαγωγή.

Δένδρα AVL

❖ Κατηγορίες ανισορροπιών:

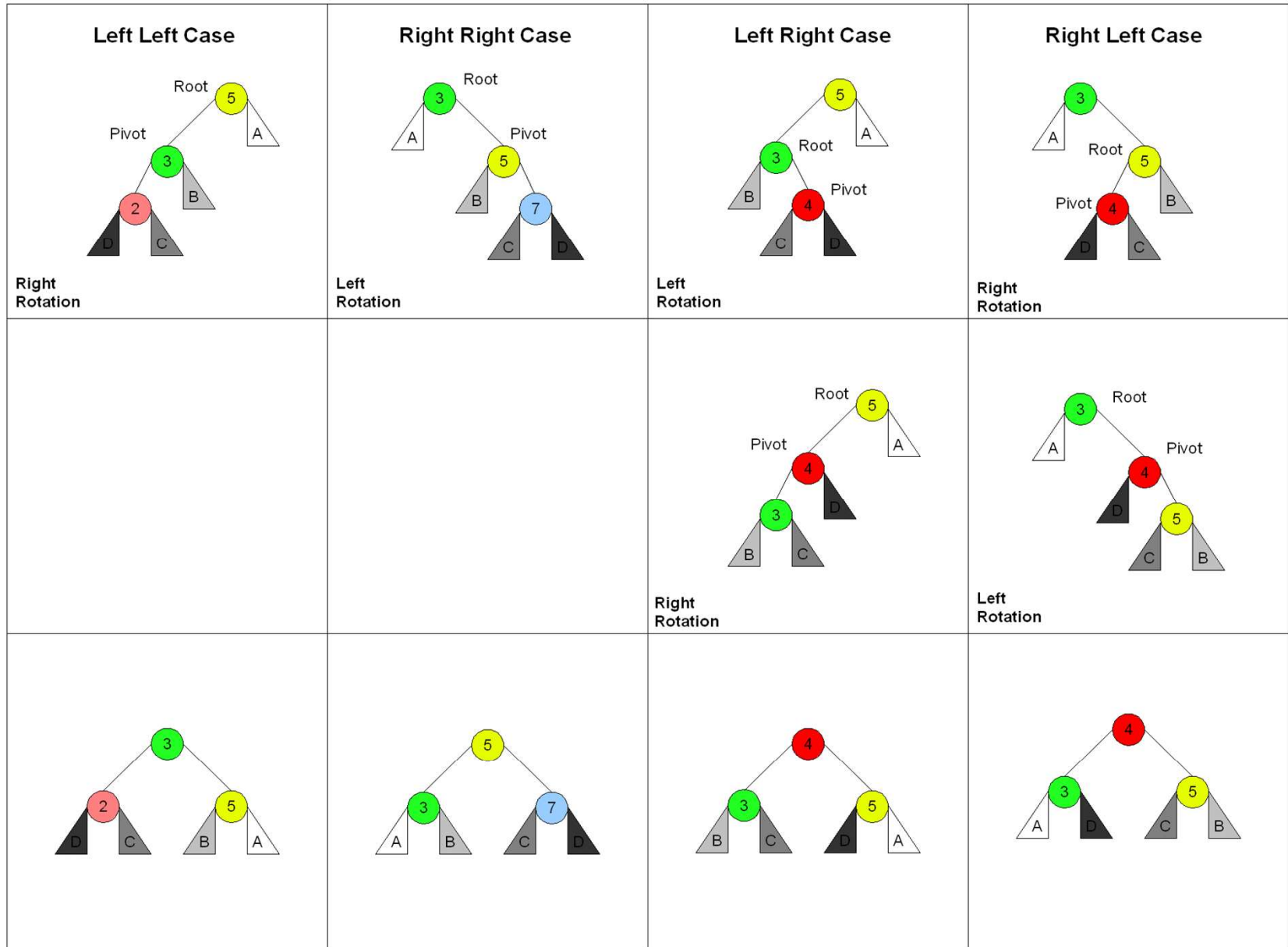
1. **LL** - ο νέος κόμβος είναι στο **αριστερό** υποδένδρο του **αριστερού** υποδένδρου του A.
2. **LR** - ο νέος κόμβος είναι στο **δεξιό** υποδένδρο του **αριστερού** υποδένδρου του A.
3. **RL** - ο νέος κόμβος είναι στο **αριστερό** υποδένδρο του **δεξιού** υποδένδρου του A.
4. **RR** - ο νέος κόμβος είναι στο **δεξιό** υποδένδρο του **δεξιού** υποδένδρου του A.

❖ Οι μετασχηματισμοί που εκτελούνται για την επανόρθωση των ανισορροπιών LL και RR ονομάζονται **απλές περιστροφές**, ενώ εκείνες που εκτελούνται για τις LR και RL καλούνται **διπλές περιστροφές**.

❖ Ο μετασχηματισμός για μία ανισορροπία LR μπορεί να θεωρηθεί ως μία περιστροφή RR ακολουθούμενη από μία περιστροφή LL, ενώ ο μετασχηματισμός για μία RL μπορεί να θεωρηθεί ως μία περιστροφή LL ακολουθούμενη από μία περιστροφή RR.

There are 4 cases in all, choosing which one is made by seeing the direction of the first 2 nodes from the unbalanced node to the newly inserted node and matching them to the top most row.

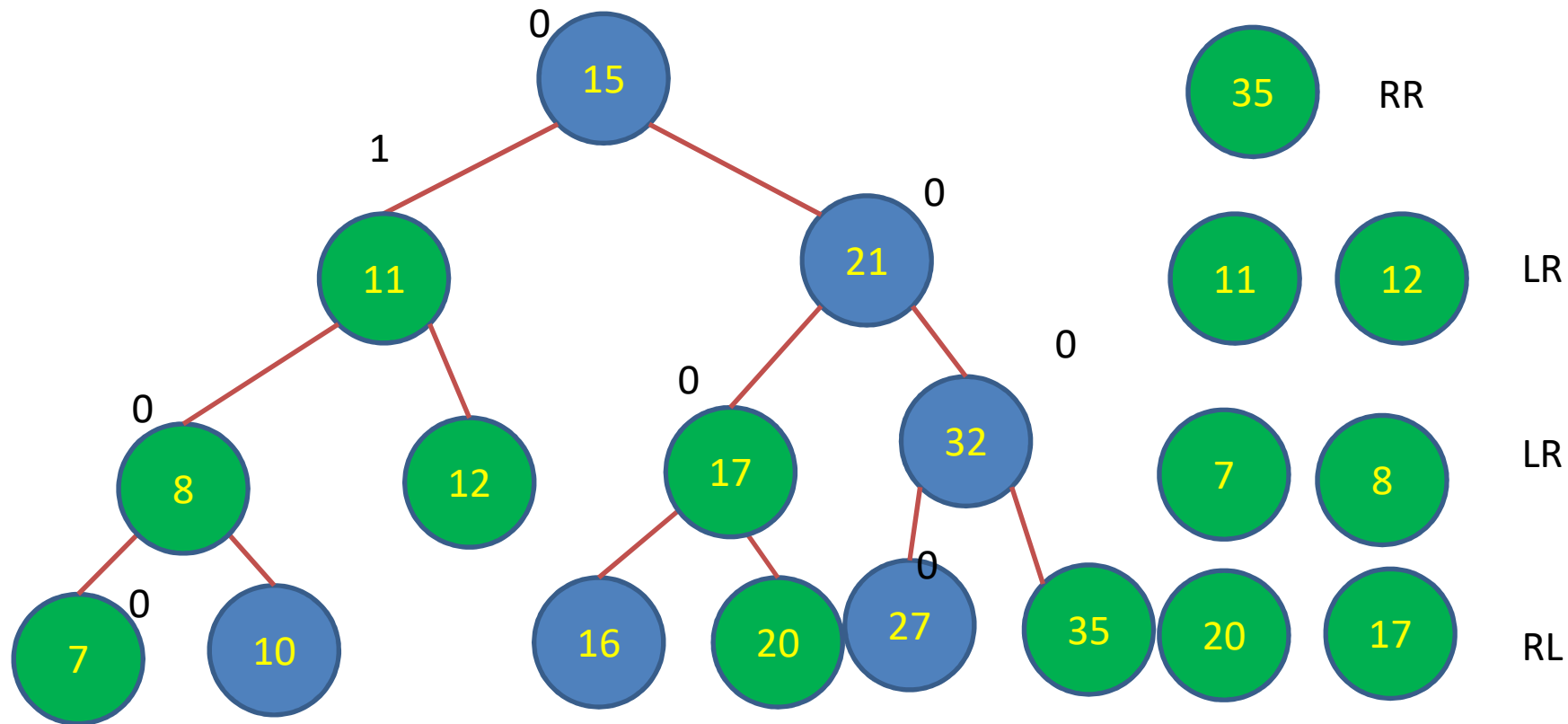
Root is the initial parent before a rotation and **Pivot** is the child to take the root's place.



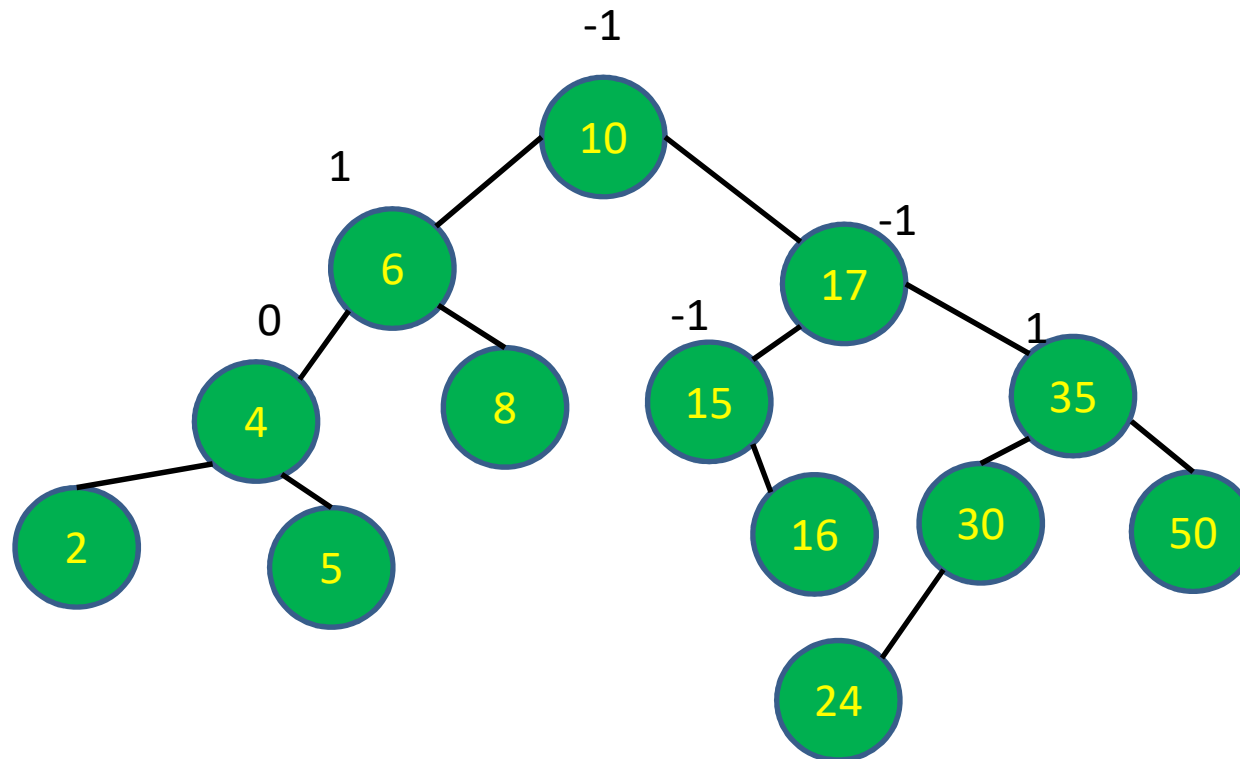
Άσκηση 1: Εισαγωγή κατάλληλων κλειδιών για εμφάνιση των ανισοροπιών.

Αρχικό Δέντρο

Εισαγωγή Κλειδιών



Άσκηση 2: Να εισαχθούν σε δένδρο AVL τα κλειδιά 15, 30, 17, 10, 35, 8, 6, 2, 5, 4, 50, 16, 24 με τη σειρά που δίνονται. Ποια η μορφή του δένδρου σε κάθε εισαγωγή;



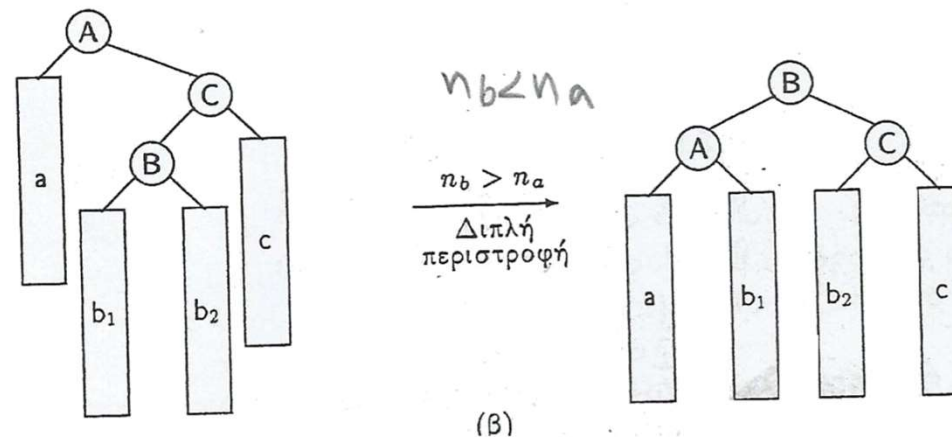
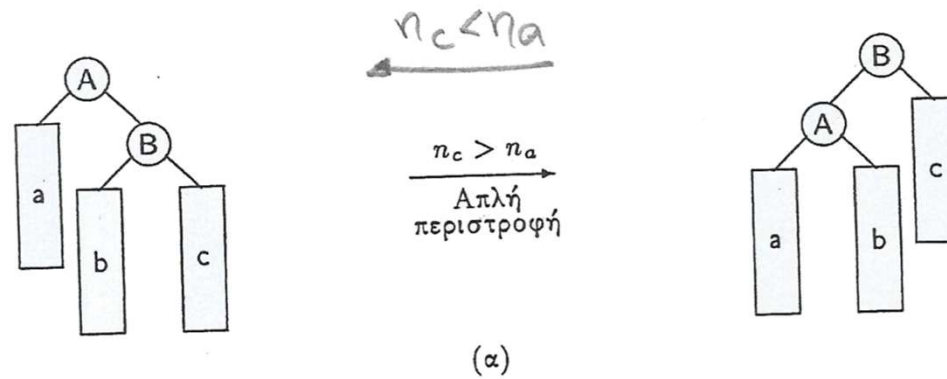
Δένδρα IPR

Στα δένδρα αυτά κριτήριο ισοζυγισμού αποτελεί η ελάττωση του εσωτερικού μονοπατιού στο αντίστοιχο υποδένδρο.

❖ Συνθήκες περιστροφής:

1. Αν $n_c > n_a$ ή $n_c < n_a$ τότε χρειάζεται απλή περιστροφή.
2. Αν $n_b > n_a$ ή $n_b < n_a$ τότε χρειάζεται διπλή περιστροφή.
3. Αν ισχύουν και οι δύο συνθήκες τότε εκτελείται η απλή περιστροφή.

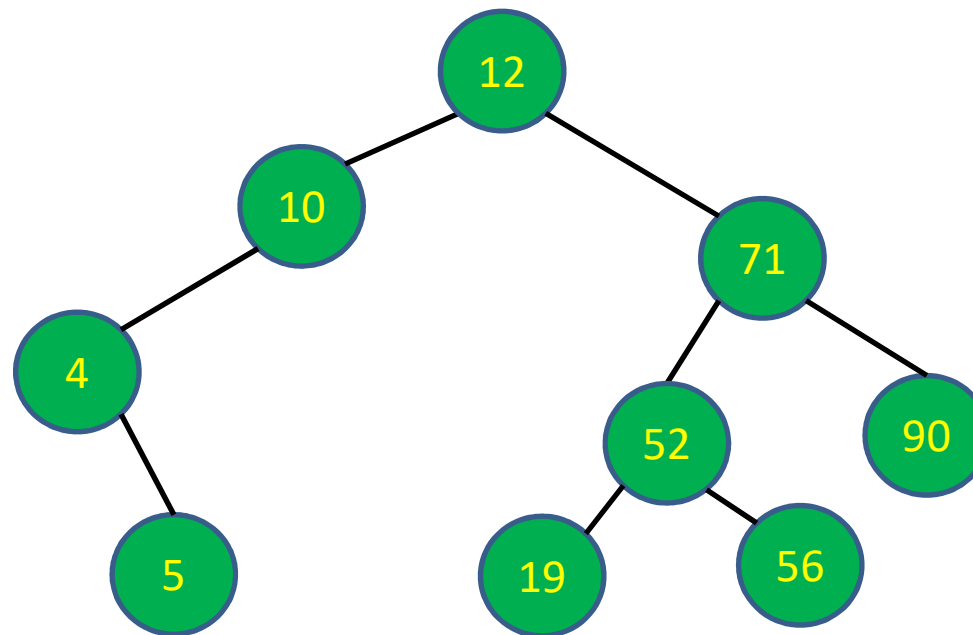
Δένδρα IPR



$$n_b = n_{b_1} + n_{b_2} + 1$$

Άσκηση 3: Εισαγωγή σε IPR δένδρο των κλειδιών : 90, 71, 10, 4, 12, 5, 19, 52, 56.

- Εισαγωγή 90, 71
- Εισαγωγή 10:
 $n_a = 1, n_b = 0,$
 $n_c = 0,$
 $n_a > n_c \rightarrow R$
περ.
- Εισαγωγή 4, 12
- Εισαγωγή 5:
 $n_a = 2, n_c = 1,$
 $n_a > n_c \rightarrow R$
περ.
- Εισαγωγή 19, 52
 $\rightarrow n_b = 3 > n_a = 2$
 $\rightarrow R$ περ. + L
περ.
- Εισαγωγή 56,
 $n_a = 0 < n_c = 1$



B-Δένδρα

Ένα **B-δένδρο**, είναι ένα δένδρο αναζήτησης **m-δρόμων**, το οποίο έχει δομή που ευνοεί το ισοζύγισμα μετά από μία εισαγωγή ή διαγραφή.

❖ Ορισμός

Ένα B-δένδρο βαθμού **d**, είναι ένα δένδρο με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Η ρίζα έχει το ελάχιστο 1 κλειδί και το μέγιστο $2d$ κλειδιά
- Κάθε εσωτερικός κόμβος (εκτός από την ρίζα) έχει το ελάχιστο d κλειδιά και το μέγιστο $2d$ κλειδιά
- Κάθε κόμβος που έχει k κλειδιά έχει $k+1$ παιδιά
- Όλα τα φύλλα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

B-Δένδρα

❖ Αναζήτηση

Η αναζήτηση γίνεται όπως και στα δένδρα m-δρόμων. Δηλ. αν ψάχνουμε το κλειδί x :

- Αν $x < k_1$, τότε η αναζήτηση συνεχίζεται στον κόμβο που δείχνει ο δείκτης p_0 .
- Αν ισχύει $k_i \leq x \leq k_{i+1}$ για $1 \leq i \leq m-1$, τότε η αναζήτηση πηγαίνει στον κόμβο που δείχνει ο δείκτης p_i .
- Αν $x > k_m$, τότε η αναζήτηση συνεχίζεται στον κόμβο που δείχνει ο δείκτης p_m .
- Αν συναντήσουμε κόμβο με τιμή κλειδιού NIL, η αναζήτηση είναι ανεπιτυχής.

B-Δένδρα

❖ Εισαγωγή

1. Ελέγχουμε αν το προς εισαγωγή κλειδί υπάρχει στο δένδρο. Αν υπάρχει η εισαγωγή απορρίπτεται. Αν δεν υπάρχει τότε συνεχίζουμε.
2. Εφαρμόζουμε συγκρίσεις για να βρούμε τον κόμβο (πάντα είναι φύλλο) στον οποίο θα εισαχθεί το νέο κλειδί.
3. Αφού βρεθεί ο κόμβος εισαγωγής, ελέγχουμε αν ο κόμβος αυτός είναι πλήρης. Αν δεν είναι εισάγουμε το νέο κλειδί και τερματίζει επιτυχώς η εισαγωγή.
4. Αν είναι πλήρης τότε ο κόμβος διασπάται (έχουμε υπερχείληση (overflow)) σε δύο κόμβους που έχουν από m κλειδιά ενώ το μεσαίο κλειδί ανεβαίνει στον πατέρα του κόμβου.
5. Στην ακραία περίπτωση που διασπάται η ρίζα, το ύψος του δένδρου αυξάνει κατά 1, από κάτω προς τα επάνω.

B-Δένδρα

❖ Διαγραφή

Η διαδικασία διαγραφής διακρίνεται σε δύο περιπτώσεις:

1. Το προς διαγραφή κλειδί ανήκει σε κόμβο φύλλο.

- Αν το φύλλο που ανήκει το προς διαγραφή κλειδί έχει συνολικά περισσότερα από τον ελάχιστο αριθμό κλειδιών κλειδιά, τότε η διαγραφή τελειώνει εύκολα.
- Αν το φύλλο περιέχει ακριβώς τον ελάχιστο αριθμό κλειδιών, τότε με την διαγραφή θα έχουμε υποχείληση (underflow). Στην περίπτωση αυτή ελέγχεται το περιεχόμενο του δεξιού γειτονικού κόμβου και έχουμε δύο περιπτώσεις:

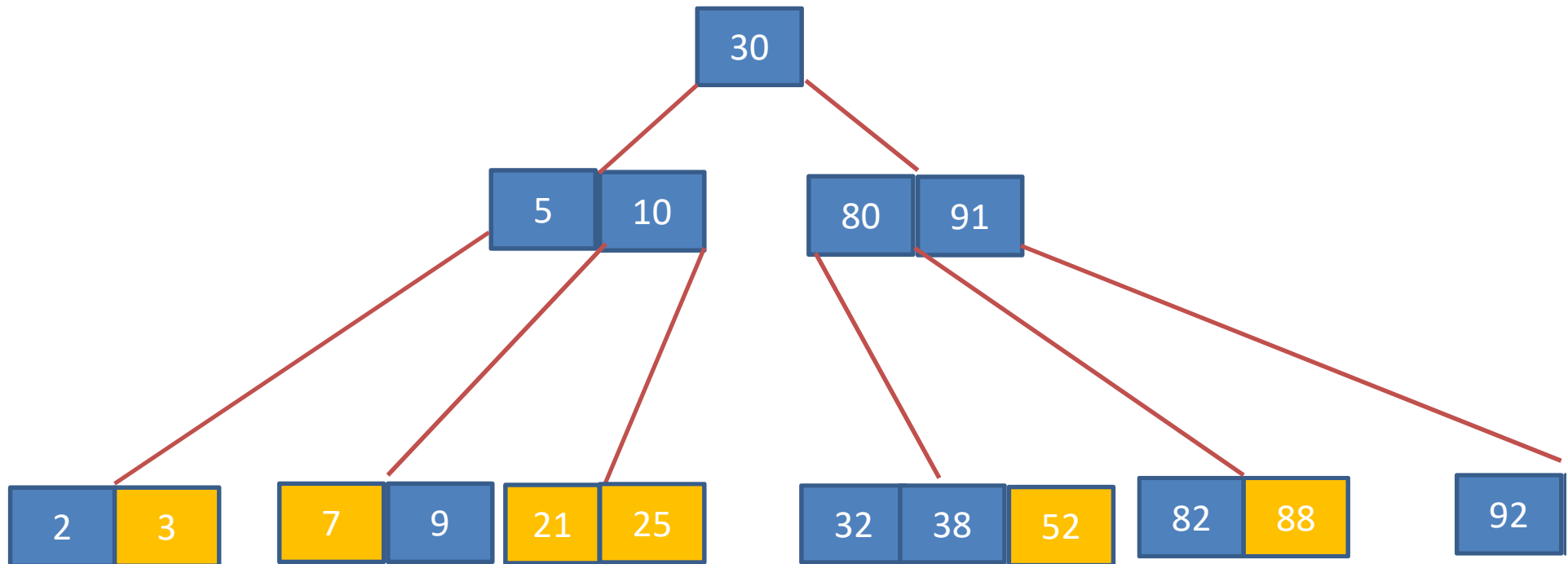
B-Δένδρα

- I. Αν ο δεξιός γειτονικός κόμβος έχει περισσότερα από τον ελάχιστο αριθμό κλειδιών κλειδιά, τότε γίνεται ένα ισοζύγισμα κόμβων με διανομή των κλειδιών εξίσου στους δύο κόμβους.
- II. Αν ο δεξιός γειτονικός κόμβος έχει ακριβώς τον ελάχιστο αριθμό κλειδιών τότε γίνεται συγχώνευση των δύο κόμβων.

Οι δύο παραπάνω λειτουργίες γίνονται στον αριστερό γειτονικό κόμβο αν δεν υπάρχει δεξιός γειτονικός κόμβος.

2. Το προς διαγραφή κλειδί ανήκει σε εσωτερικό κόμβο. Η περίπτωση αυτή μετασχηματίζεται αν το διαγραμμένο κλειδί αντικατασταθεί από το μεγαλύτερο κλειδί του αριστερού γειτονικού υποδένδρου είτε από το μικρότερο κλειδί του δεξιού γειτονικού υποδένδρου. Το κλειδί που θα χρησιμοποιηθεί για αντικατάσταση πρέπει οπωσδήποτε να βρίσκεται σε ένα φύλλο.

Άσκηση 4: Να εισαχθούν στο παρακάτω B-δένδρο **βαθμού 2** τα κλειδιά 3, 21, 25, 52, 88, 7, 100 με τη σειρά που δίνονται. Ποια η μορφή του δένδρου σε κάθε μία εισαγωγή;



Εισαγωγή 3, 21

Εισαγωγή 25 → overflow

Εισαγωγή 52, 88

Εισαγωγή 7 → overflow

Εισαγωγή 100 → overflow → overflow