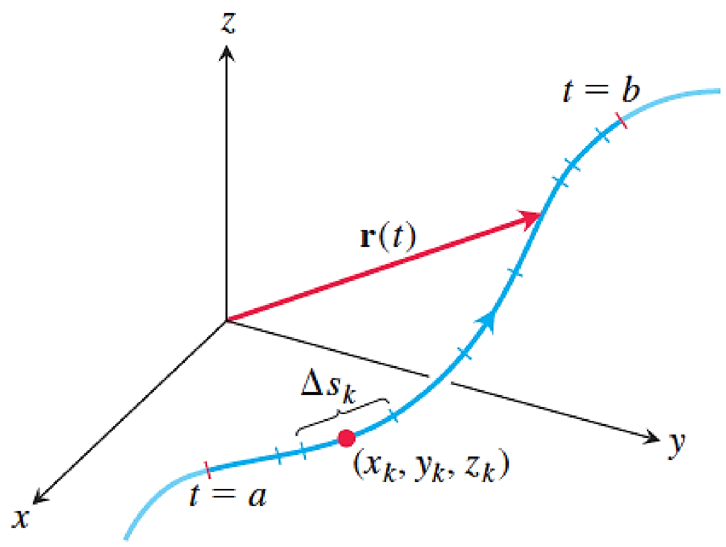
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ II

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

2 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

- Έστω $f(x, y, z)$ πραγματική συνάρτηση την οποία θέλουμε να ολοκληρώσουμε πάνω στην καμπύλη C (και όχι σε ένα διάστημα $[a, b]$ όπως έχουμε δει μέχρι τώρα)
- Η καμπύλη C βρίσκεται εντός του πεδίου ορισμού της f και παραμετρικοποιείται από την $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ \alpha \leq t \leq b$
- Οι τιμές της f κατά μήκος της καμπύλης δίνονται από τη σύνθετη συνάρτηση $f(g(t), h(t), k(t))$
- Θα ολοκληρώσουμε τη σύνθετη αυτή συνάρτηση ως προς το μήκος τόξου από $t = \alpha$ έως $t = b$
- Διαμερίζουμε πρώτα την καμπύλη C σε πεπερασμένο πλήθος n «υποτόξων» μήκους Δs_k
- Σε κάθε υποτόξο επιλέγουμε ένα σημείο (x_k, y_k, z_k)



ΣΧΗΜΑ 16.1 Η καμπύλη $\mathbf{r}(t)$ διαμερίζεται σε μικρά τόξα από $t = a$ έως $t = b$. Το μήκος ενός τυπικού υποτόξου είναι Δs_k.

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

- Σχηματίζουμε το άθροισμα (που είναι παρόμοιο με ένα άθροισμα Riemann):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k$$

- Ανάλογα με το πώς διαμερίζουμε την καμπύλη *C* και επιλέγουμε το (x_k, y_k, z_k) στο k-οστό υποτόξο, μπορεί να πάρουμε διαφορετικές τιμές για το S_n
- Αν η f είναι συνεχής και οι συναρτήσεις g, h και k έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους, τότε τα αθροίσματα αυτά προσεγγίζουν κάποιο όριο καθώς το *n* αυξάνει και τα μήκη Δs_k τείνουν στο μηδέν

4 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

- Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό, που είναι παρόμοιος με εκείνον για το απλό ολοκλήρωμα
- Στον ορισμό, θεωρούμε ότι η λεπτότητα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$, οπότε το μήκος του μεγαλύτερου υποτόξου τείνει στο μηδέν

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν η f είναι ορισμένη πάνω σε μια καμπύλη C που δίνεται παραμετρικά από την $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ \alpha \leq t \leq b$, τότε το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της *f* επί της *C*** είναι:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta s_k$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.

5 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

- Αν η καμπύλη C είναι λεία για $\alpha \leq t \leq b$ (οπότε η $\mathbf{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ είναι συνεχής και ποτέ 0) και η συνάρτηση f είναι συνεχής πάνω στην C, τότε μπορεί να δειχτεί ότι το προηγούμενο όριο υπάρχει
- Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού για να παραγωγίσουμε την εξίσωση που δίνει το μήκος τόξου

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau$$

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

ώστε να εκφράσουμε το ds του επικαμπύλιου ολοκληρώματος ως $ds = |\mathbf{v}(t)|dt$ και να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της f επί της C ως

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f\big(g(t), h(t), k(t)\big)|\mathbf{v}(t)|dt$$

6 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

Πώς υπολογίζουμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Για να ολοκληρώσουμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x, y, z)$ πάνω σε μια καμπύλη C:

1. Βρίσκουμε μια λεία παραμετρικοποίηση της *C*,

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \qquad \alpha \le t \le b$$

2. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f\big(g(t), h(t), k(t)\big)|\mathbf{v}(t)|dt$$

$$\boxed{f\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = f\big(g(t), h(t), k(t)\big)}$$

- Αν η f παίρνει τη σταθερή τιμή 1, τότε το ολοκλήρωμα της f επί της C δίνει το μήκος της C από $t = \alpha$ έως $t = b$
- Η τιμή $f(g(t), h(t), k(t))$ κατά μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{r}$ συμβολίζεται και ως $f(\boldsymbol{r}(t))$

7 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

Πώς υπολογίζουμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Άσκηση – Παράδειγμα

- Ολοκληρώστε την $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ στο ευθύγραμμο τμήμα C που ενώνει την αρχή με το σημείο (1, 1, 1)

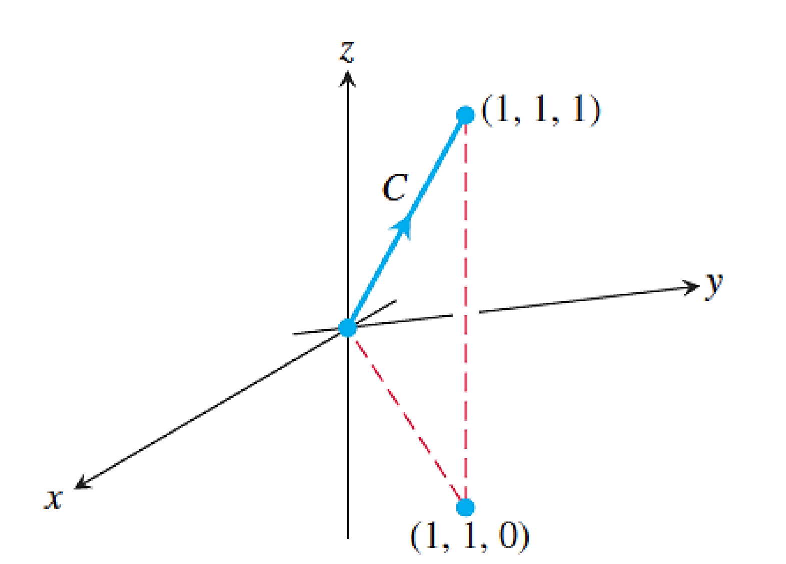
<u>Λύση</u>

- Εφόσον κάθε παραμετρικοποίηση θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα, επιλέγουμε την απλούστερη:

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le t \le 1$$

- Όλες οι συνιστώσες έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και το $|\mathbf{v}(t)| = |\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ είναι πάντα διάφορο του 0, άρα η παραμετρικοποίηση είναι λεία

$$\boxed{t\boldsymbol{i} \to g(t) = t, t\boldsymbol{j} \to h(t) = t, t\boldsymbol{k} \to k(t) = t}$$



ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

Πώς υπολογίζουμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

(…συνέχεια) Λύση

- Το ζητούμενο ολοκλήρωμα της f επί της C είναι:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_0^1 f(t,t,t)\left(\sqrt{3}\right)dt = \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\left(\sqrt{3}\right)dt =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)dt = \sqrt{3}\left[t^2 - t^3\right]_0^1 = 0$$

9 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

Προσθετική ιδιότητα

- Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν την χρήσιμη ιδιότητα ότι αν μια τμηματικά λεία καμπύλη *C* αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος λείων καμπυλών $C_1, C_2, \dots, C_n$, που τις έχουμε ενώσει μία προς μία στα άκρα τους, τότε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης επί της *C* είναι το άθροισμα των ολοκληρωμάτων επί των καμπυλών που την απαρτίζουν:

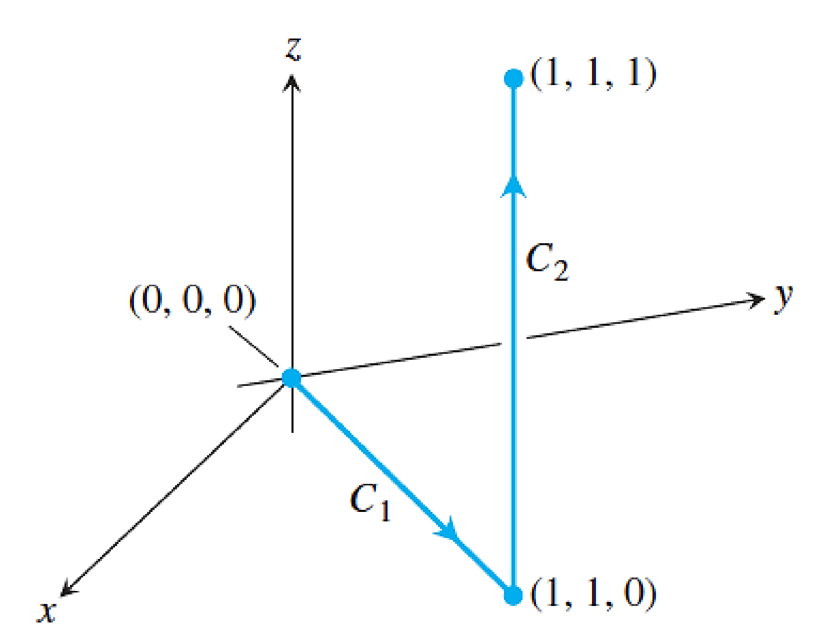
$$\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds + \cdots + \int_{C_n} f\,ds$$

10 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

Πώς υπολογίζουμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Άσκηση – Παράδειγμα

- Στο Σχήμα φαίνεται μια άλλη διαδρομή από την αρχή έως το σημείο (1, 1, 1), που αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα C_1 και C_2. Ολοκληρώστε την $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ επί της $C_1 \cup C_2$.



<u>Λύση</u>

- Επιλέγουμε τις απλούστερες παραμετρικοποιήσεις για τις C_1 και C_2, υπολογίζοντας ταυτόχρονα και τα μέτρα:

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_1: t\boldsymbol{i} \rightarrow g(t) = t, t\boldsymbol{j} \rightarrow h(t) = t, 0\boldsymbol{k} \rightarrow k(t) = 0 \\ C_2: \boldsymbol{i} \rightarrow g(t) = 1, \boldsymbol{j} \rightarrow h(t) = 1, t\boldsymbol{k} \rightarrow k(t) = t \end{array}}$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Βαθμωτών Συναρτήσεων

Πώς υπολογίζουμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

(...συνέχεια) Λύση

- Το ζητούμενο ολοκλήρωμα της f επί της C είναι:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z)\, ds &= \int_{C_1} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_2} f(x, y, z)\, ds && \text{Εξ. (3)} \\
&= \int_0^1 f(t, t, 0)\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 f(1, 1, t)(1)\, dt && \text{Εξ. (2)} \\
&= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0)\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1)\, dt \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Επιφανειακά Ολοκληρώματα

- Για να υπολογίσουμε τη μάζα μιας επιφάνειας, τη ροή ενός ρευστού διά μέσου μιας καμπύλης μεμβράνης, ή το ολικό ηλεκτρικό φορτίο πάνω σε μια επιφάνεια, χρειάζεται να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση σε μια καμπύλη επιφάνεια στον χώρο
- Ένα τέτοιο **επιφανειακό ολοκλήρωμα** είναι η δισδιάστατη επέκταση της έννοιας του επικαμπύλιου ολοκληρώματος που χρησιμοποιήσαμε για να ολοκληρώσουμε σε μια μονοδιάστατη καμπύλη
- Έστω ότι η συνάρτηση $G(x, y, z)$ δίνει την πυκνότητα μάζας (τη μάζα ανά μονάδα επιφάνειας) σε κάθε σημείο πάνω σε μια επιφάνεια S
- Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε την ολική μάζα της S ως ολοκλήρωμα, θεωρώντας ότι αυτή ορίζεται παραμετρικά σε ένα χωρίο R στο επίπεδο uv

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R$$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Επιφανειακά Ολοκληρώματα

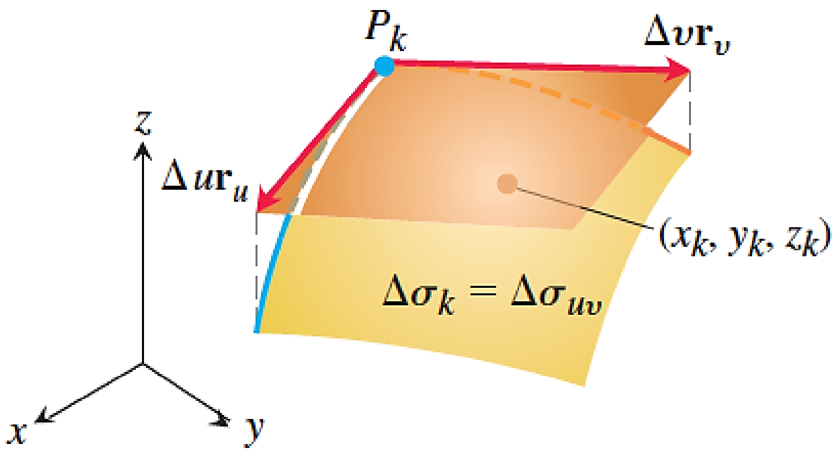
- Στο Σχήμα βλέπουμε πώς μια υποδιαίρεση του *R* (που θεωρούμε ορθογώνιο για απλότητα) διαιρεί την επιφάνεια *S* σε αντίστοιχες καμπύλες στοιχειώδεις επιφάνειες, εμβαδού

$$\Delta\sigma_{uv} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du dv$$

- Όπως κάναμε για τις υποδιαιρέσεις όταν ορίσαμε τα διπλά ολοκληρώματα, αριθμούμε τις καμπύλες στοιχειώδεις επιφάνειες με κάποια σειρά, με τα εμβαδά τους να δίνονται από τα $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$

- Για να σχηματίσουμε ένα άθροισμα Riemann πάνω στην S, επιλέγουμε ένα σημείο (x_k, y_k, z_k) στην k-οστή επιφάνεια, πολλαπλασιάζουμε την τιμή της συνάρτησης *G* σε εκείνο το σημείο με το εμβαδόν $\Delta\sigma_k$, και προσθέτουμε τα γινόμενα:

$$\sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k, z_k)\Delta\sigma_k$$



ΣΧΗΜΑ 16.49 Το εμβαδόν της στοιχειώδους επιφάνειας $\Delta\sigma_k$ προσεγγίζεται από το εμβαδόν του εφαπτόμενου παραλληλογράμμου που καθορίζεται από τα διανύσματα $\Delta u\, \mathbf{r}_u$ και $\Delta v\, \mathbf{r}_v$. Το σημείο (x_k, y_k, z_k) ανήκει στη στοιχειώδη επιφάνεια, κάτω από το παραλληλόγραμμο που φαίνεται εδώ.

14 Επιφανειακά Ολοκληρώματα

- Ανάλογα με το πώς επιλέγουμε το (x_k, y_k, z_k) στην k-οστή στοιχειώδη επιφάνεια, μπορεί να πάρουμε διαφορετικές τιμές για αυτό το άθροισμα Riemann
- Έπειτα παίρνουμε το όριο καθώς ο αριθμός αυτών των στοιχειωδών επιφανειών αυξάνει, τα εμβαδά τους συρρικνώνονται στο μηδέν, και $\Delta u \to 0$ και $\Delta v \to 0$
- Το όριο αυτό, οποτεδήποτε υπάρχει ανεξάρτητα από όλες τις επιλογές που έχουμε κάνει, ορίζει το **επιφανειακό ολοκλήρωμα της *G*** στην επιφάνεια S ως:

$$\iint_S G(x, y, z)d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k, z_k)\,\Delta\sigma_k$$