ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΔΙΠΛΑ ΚΑΙ ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

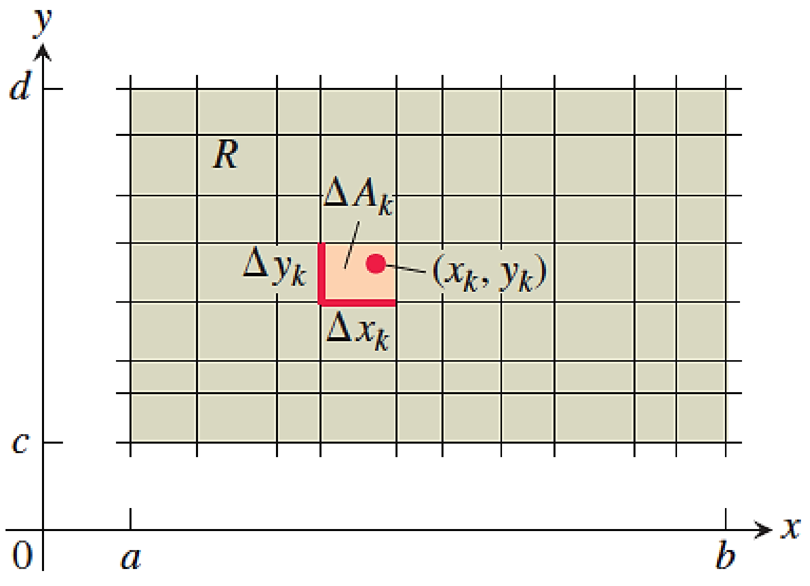
Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Διπλά ολοκληρώματα

- Ξεκινάμε τη διερεύνηση των διπλών ολοκληρωμάτων θεωρώντας το ορθογώνιο επίπεδο χωρίο. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x, y)$ ορισμένη σε ορθογώνιο χωρίο R

$$R: \quad a \leq x \leq b, \qquad c \leq y \leq d$$

- Υποδιαιρούμε το R σε μικρά ορθογώνια χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα παράλληλων στους άξονες *x* και *y*



ΣΧΗΜΑ 15.1 Το ορθογώνιο πλέγμα διαμερίζει το χωρίο R σε μικρά ορθογώνια εμβαδού $\Delta A_k = \Delta x_k \, \Delta y_k$.

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Διπλά ολοκληρώματα

- Για να σχηματίσουμε ένα άθροισμα Riemann στο *R*, επιλέγουμε ένα σημείο (x_k, y_k) εντός του k-οστού μικρού ορθογωνίου, πολλαπλασιάζουμε την τιμή της f σε εκείνο το σημείο με το εμβαδόν ΔA_k, και προσθέτουμε τα γινόμενα:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

- Ανάλογα με το πώς επιλέγουμε το (x_k, y_k) στο k-οστό μικρό ορθογώνιο, μπορεί να προκύψουν διαφορετικές τιμές για το S_n
- Η λεπτότητα μιας διαμέρισης P, που γράφεται $\|P\|$, είναι το μέγιστο πλάτος ή ύψος κάθε ορθογωνίου της διαμέρισης
- Αν $\|P\| = 0{,}1$, τότε όλα τα ορθογώνια της διαμέρισης του *R* έχουν πλάτος το πολύ 0,1

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Διπλά ολοκληρώματα

- Το όριο που προκύπτει για το άθροισμα Riemann όταν $\|P\| \to 0$ γράφεται τότε ως:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

- Καθώς $\|P\| \to 0$ και τα ορθογώνια στενεύουν και κονταίνουν το πλήθος τους *n* αυξάνεται, οπότε μπορούμε να γράψουμε το όριο και ως:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

- με δεδομένο ότι $\|P\| \to 0$, και άρα $\Delta A_k \to 0$, καθώς $n \to \infty$

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Διπλά ολοκληρώματα

- Όταν υπάρχει όριο των αθροισμάτων S_n, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και το όριο ονομάζεται **διπλό ολοκλήρωμα** της f στο R. Το διπλό ολοκλήρωμα συμβολίζεται ως:

$$\iint_R f(x,y)dA$$

ή

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

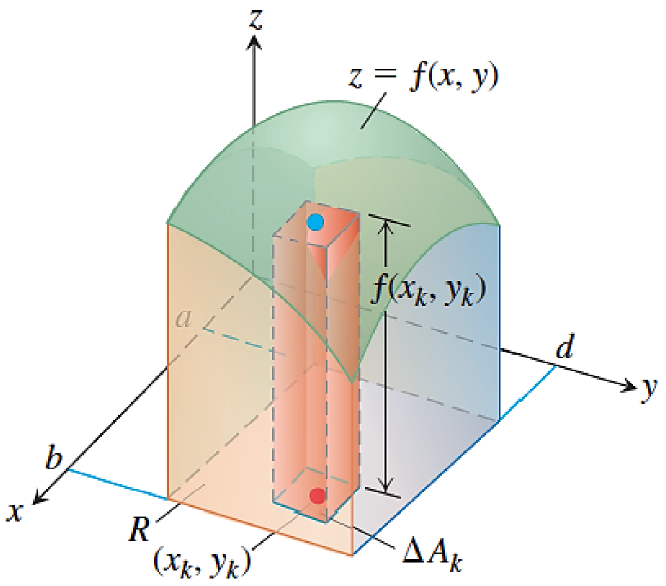
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής σε όλο το R, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη (πολλές ασυνεχείς συναρτήσεις είναι επίσης ολοκληρώσιμες, π.χ. συναρτήσεις που είναι ασυνεχείς μόνο σε πεπερασμένο αριθμό σημείων ή λείες καμπύλες)

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Διπλά ολοκληρώματα για τον υπολογισμό όγκων

- Όταν η συνάρτηση *f(x,* y) είναι θετική σε ένα ορθογώνιο χωρίο ***R*** του επιπέδου *xy*, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της *f* στο ***R*** ως τον όγκο της τρισδιάστατης στερεής περιοχής πάνω από το επίπεδο *xy* που είναι κάτω φραγμένη από το ***R*** και άνω φραγμένη από την επιφάνεια *z* = *f(x,* y)



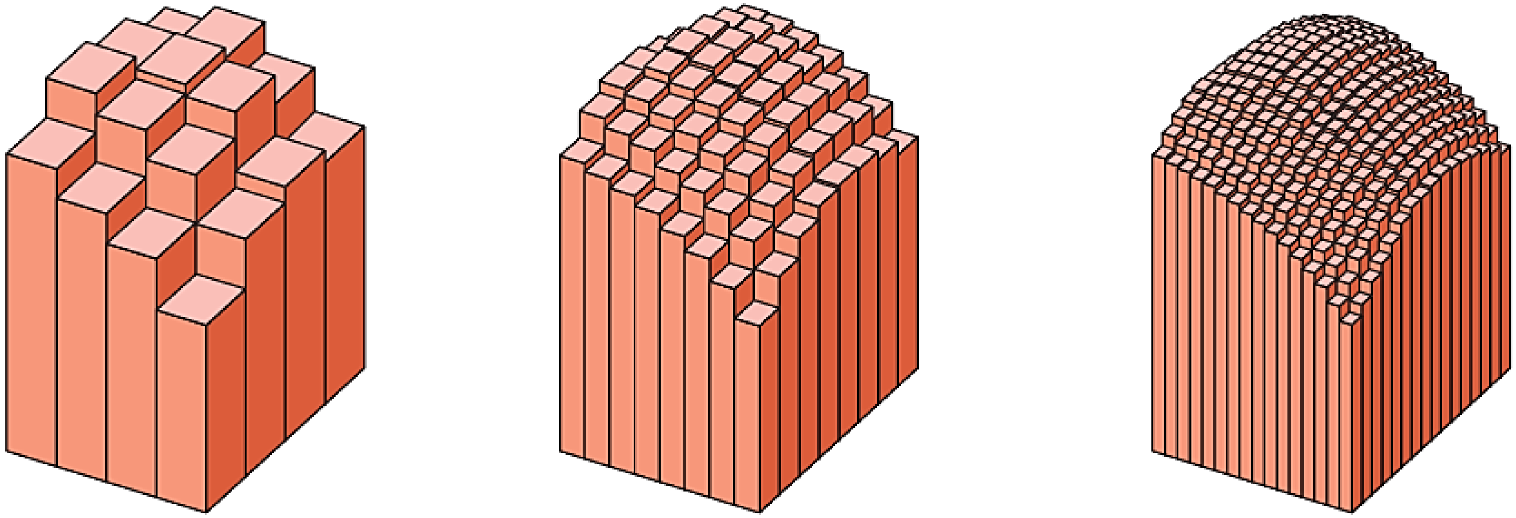
ΣΧΗΜΑ 15.2 Η προσέγγιση στερεών με ορθογώνια παραλληλεπίπεδα μας οδηγεί στο να ορίσουμε όγκους πιο γενικών στερεών ως διπλά ολοκληρώματα. Ο όγκος του στερεού που φαίνεται εδώ είναι το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x, y)$ στο χωρίο βάσης R.

7

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Διπλά ολοκληρώματα για τον υπολογισμό όγκων

- Στο σχήμα φαίνεται ότι οι προσεγγίσεις του όγκου με αθροίσματα Riemann γίνονται ακριβέστερες καθώς ο αριθμός *n* των κουτιών αυξάνει



(α) $n = 16$ (β) $n = 64$ (γ) $n = 256$

ΣΧΗΜΑ 15.3 Καθώς το n αυξάνει, τα προσεγγιστικά αθροίσματα Riemann τείνουν στον συνολικό όγκο του στερεού που φαίνεται στο Σχήμα 15.2.

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

- Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο της περιοχής μεταξύ του επιπέδου $z = 4 - x - y$ και του ορθογώνιου χωρίου R: $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$ του επιπέδου *xy*
- Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο διατμήσεων με διατμήσεις κάθετες στον άξονα x, όπως στο σχήμα, τότε ο όγκος είναι

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x)dx$$

όπου $A(x)$ είναι το εμβαδόν διατομής στο x

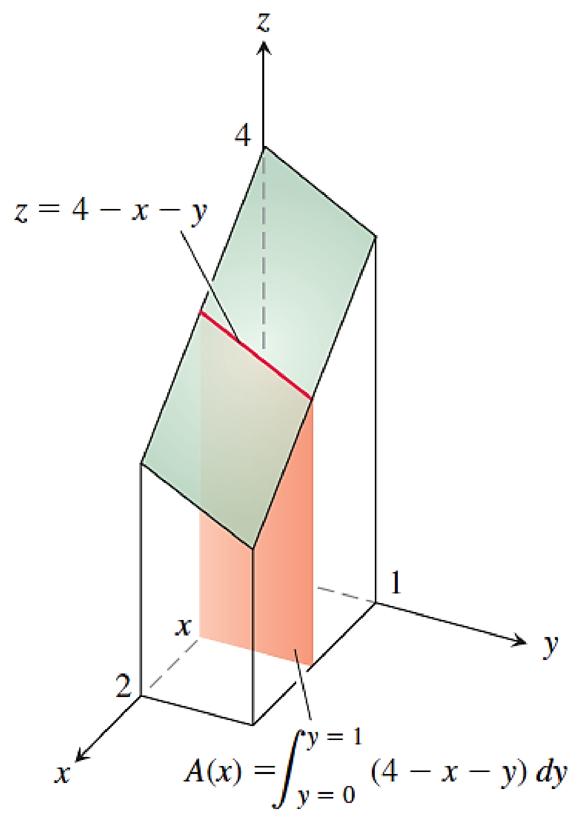
- Για κάθε τιμή του x, μπορούμε να υπολογίσουμε το $A(x)$ ως το ολοκλήρωμα

Σημείωση: Οι μεταβλητές x και y είναι ανεξάρτητες.
Εδώ το x θεωρείται σταθερό καθώς μεταβάλλεται το y.

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)dy$$

που ισούται με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $z = 4 - x - y$ στο επίπεδο που ορίζει η διατομή στο x

- Κατά τον υπολογισμό του $A(x)$, το *x* διατηρείται σταθερό και η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα ως προς *y*



Σχημα 15.4 Για να βρούμε το εμβαδόν της διατομής $A(x)$, κρατάμε σταθερό το x και ολοκληρώνουμε ως προς y.

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

- Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις, βλέπουμε ότι ο όγκος ολόκληρου του στερεού είναι:

$$\text{Όγκος} = \int_{x=0}^{x=2} A(x)dx = \int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=1}(4-x-y)dy\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2}\left(\left[4y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}\right)dx = \int_{x=0}^{x=2}\left(\frac{7}{2}-x\right)dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 5$$

- Αν θέλαμε μόνο να γράψουμε έναν τύπο για τον όγκο, χωρίς να εκτελέσουμε τις ολοκληρώσεις, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\text{Όγκος} = \int_0^2 \int_0^1 (4-x-y)dy\,dx$$

όπου η έκφραση στο δεξιό μέλος ονομάζεται και **διαδοχικό ολοκλήρωμα**

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

- Αν είχαμε υπολογίσει τον όγκο διατέμνοντας με επίπεδα κάθετα στον άξονα *y* (Σχήμα 15.5), το τελικό αποτέλεσμα για τον όγκο θα ήταν το ίδιο:

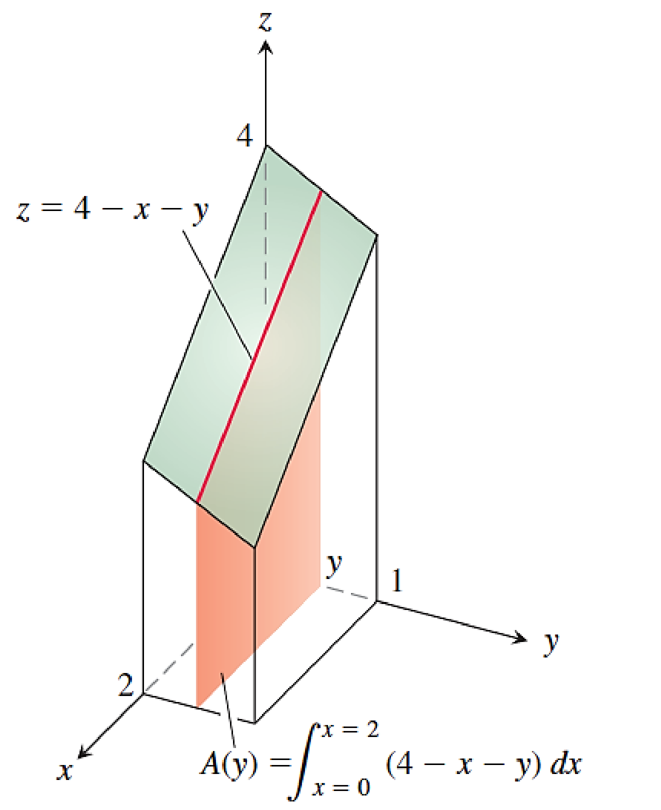
Σημείωση: Οι μεταβλητές x και y είναι ανεξάρτητες.
Εδώ το y θεωρείται σταθερό καθώς μεταβάλλεται το x.

$$A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y$$

- Ο όγκος ολόκληρου του στερεού είναι επομένως

$$\text{Όγκος} = \int_{y=0}^{y=1} A(y)dy = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y)dy = \left[6y - y^2\right]_0^1 = 5$$

$$\text{Όγκος} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y)dx\, dy$$



Σχημα 15.5 Για να βρούμε το εμβαδόν της διατομής $A(y)$, κρατάμε σταθερό το y και ολοκληρώνουμε ως προς x.

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

Θεώρημα του Fubini (πρώτη μορφή)

- Αν η *f(x, y)* είναι συνεχής παντού στο ορθογώνιο χωρίο ***R***: $a \leq x \leq b, \;\; c \leq y \leq d$, τότε

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx$$

- Το θεώρημα του Fubini λέει ότι τα διπλά ολοκληρώματα πάνω σε ορθογώνια χωρία μπορούν να υπολογιστούν ως διαδοχικά ολοκληρώματα
- Δηλαδή, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα ολοκληρώνοντας διαδοχικά ως προς καθεμιά μεταβλητή, χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού
- Το θεώρημα του Fubini λέει επίσης ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ολοκληρώνοντας με οποιαδήποτε σειρά

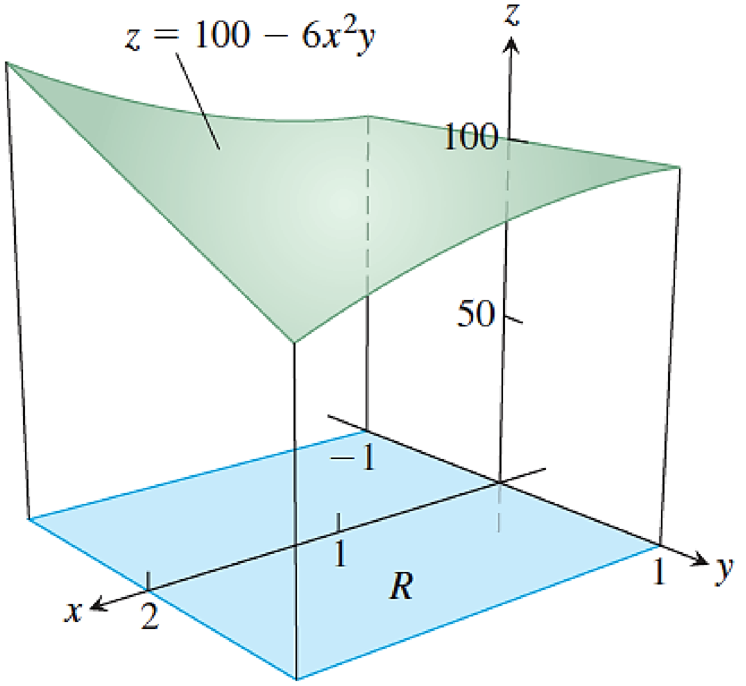
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

Άσκηση - Παράδειγμα

- Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_R f(x,y)dA$ με $f(x,y) = 100 - 6x^2y$ και R: $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$



ΣΧΗΜΑ 15.6 Το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R f(x, y)\, dA$ δίνει τον όγκο μεταξύ της επιφάνειας $z = 100 - 6x^2y$ και του ορθογώνιου χωρίου R (Παράδειγμα 1).

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

(..συνέχεια) Λύση

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(100-6x^2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\Big[100x-2x^3y\Big]_{x=0}^{x=2}dy$$
$$= \int_{-1}^{1}(200-16y)\,dy = \Big[200y-8y^2\Big]_{-1}^{1} = 400.$$

- Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, παίρνουμε την ίδια απάντηση:

$$\int_0^2\int_{-1}^{1}(100-6x^2y)\,dy\,dx = \int_0^2\Big[100y-3x^2y^2\Big]_{y=-1}^{y=1}dx$$
$$= \int_0^2\big[(100-3x^2)-(-100-3x^2)\big]\,dx$$
$$= \int_0^2 200\,dx = 400.$$

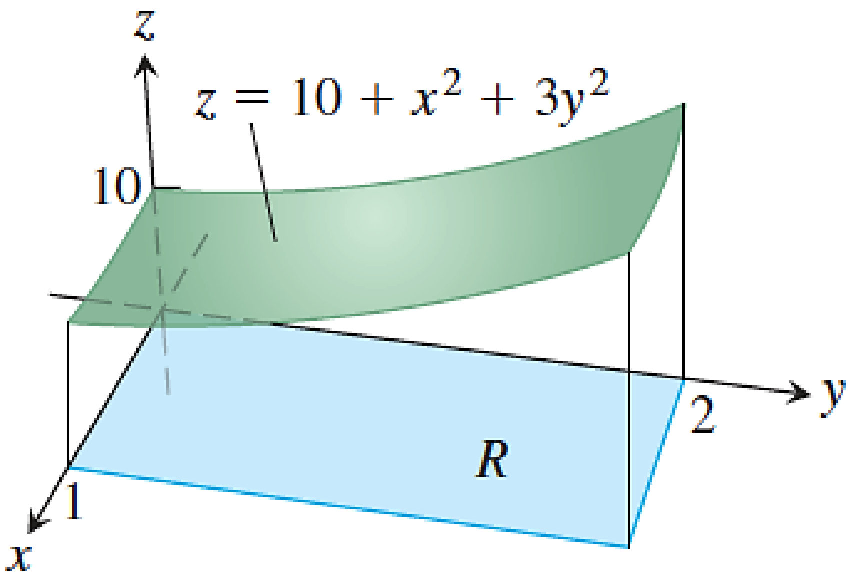
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

Άσκηση - Παράδειγμα

- Βρείτε τον όγκο του χωρίου που φράσσεται πάνω από το ελλειπτικό παραβολοειδές $z = 10 + x^2 + 3y^2$ και κάτω από το ορθογώνιο $R\!: \; 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le 2$



ΣΧΗΜΑ 15.7 Το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R f(x, y)\, dA$ δίνει τον όγκο μεταξύ της επιφάνειας $z = 10 + x^2 + 3y^2$ και του ορθογώνιου χωρίου R (Παράδειγμα 2).

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

(..συνέχεια) Λύση

$$V = \iint_R (10 + x^2 + 3y^2)\,dA = \int_0^1 \int_0^2 (10 + x^2 + 3y^2)\,dy\,dx$$

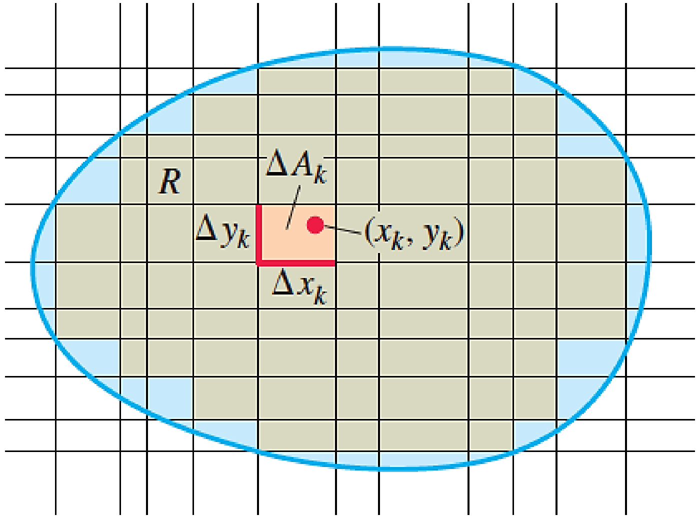
$$= \int_0^1 \Big[10y + x^2y + y^3 \Big]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^1 (20 + 2x^2 + 8)\,dx = \Big[20x + \frac{2}{3}x^3 + 8x \Big]_0^1 = \frac{86}{3}.$$

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Διπλά ολοκληρώματα σε φραγμένα, μη ορθογώνια χωρία

- Προκειμένου να ορίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x, y)$ σε φραγμένο, μη ορθογώνιο χωρίο R, όπως αυτό του Σχήματος 15.8, ξεκινάμε πάλι καλύπτοντας το R με ένα πλέγμα μικρών ορθογώνιων κυψελίδων, η ένωση των οποίων περιέχει όλα τα σημεία του R
- Τη φορά αυτή, ωστόσο, δεν μπορούμε να καλύψουμε πλήρως το R με πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων που κείνται εντός του R, διότι το σύνορό του είναι καμπύλο, οπότε κάποια από τα μικρά ορθογώνια του πλέγματος κείνται εν μέρει εκτός του R
- Στα χωρία με τα οποία εργαζόμαστε συνήθως, ολοένα και μεγαλύτερο μέρος του R περιλαμβάνεται καθώς η λεπτότητα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν



ΣΧΗΜΑ 15.8 Ένα ορθογώνιο πλέγμα που διαμερίζει ένα φραγμένο, μη ορθογώνιο χωρίο σε ορθογώνιες κυψελίδες.

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Διπλά ολοκληρώματα σε φραγμένα, μη ορθογώνια χωρία

- Από τη στιγμή που έχουμε μια διαμέριση του *R,* αριθμούμε το ορθογώνια με κάποια διάταξη από 1 έως *n* και θέτουμε ΔA_k το εμβαδόν του k-οστού ορθογωνίου
- Έπειτα επιλέγουμε ένα σημείο (x_k, y_k) εντός του k-οστού ορθογωνίου και σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

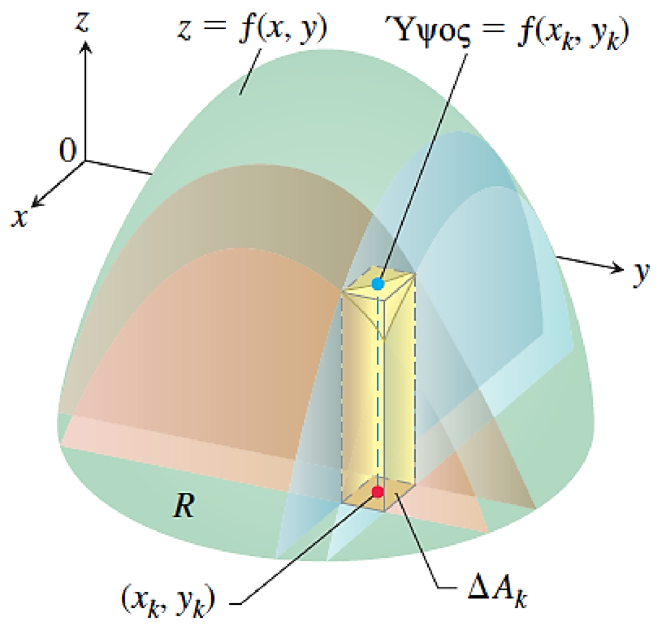
- Καθώς η λεπτότητα της διαμέρισης που σχηματίζει το Sn τείνει στο μηδέν, $\|P\| \to 0$, το πλήθος των ορθογωνίων τείνει στο άπειρο
- Αν η *f(x, y)* είναι συνεχής συνάρτηση, τότε αυτά τα αθροίσματα Riemann συγκλίνουν σε μια οριακή τιμή, που ονομάζεται διπλό ολοκλήρωμα της *f(x, y)* στο *R:*

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\,dA$$

18 Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία
Όγκοι

- Αν η *f(x, y)* είναι θετική και συνεχής στο *R,* ορίζουμε τον όγκο της στερεής περιοχής μεταξύ του R και της επιφάνειας $z = f(x, y)$ ως

$$\iint_R f(x,y)dA$$



$$\text{Όγκος} = \lim \sum f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R f(x, y)\,dA$$

ΣΧΗΜΑ 15.9 Ο όγκος ενός στερεού με καμπυλόγραμμη βάση ορίζεται ως όριο προσεγγιστικών ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων.

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

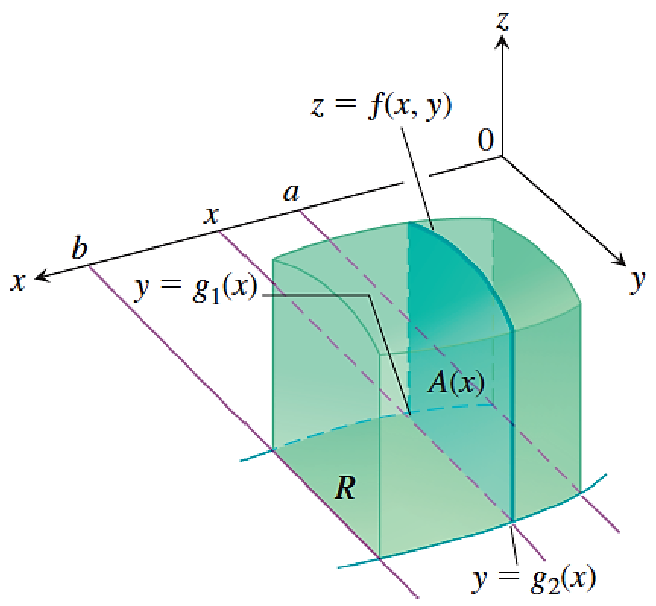
Όγκοι

- Αν το *R* είναι ένα χωρίο όπως αυτό του επιπέδου *xy* στο σχήμα, φραγμένο «πάνω» και «κάτω» από τις καμπύλες $y = g_2(x)$ και $y = g_2(x)$ αντίστοιχα, και στα πλάγια από τις ευθείες $x = \alpha, x = b$, μπορούμε και πάλι να υπολογίσουμε τον όγκο με τη μέθοδο των διατμήσεων
- Εμβαδόν διατομής:

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)dy$$

- Όγκος σε μορφή διαδοχικού ολοκληρώματος (από $x = \alpha$ έως $x = b$):

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$



Σχημα 15.10 Το εμβαδόν της κατακόρυφης τομής που φαίνεται εδώ είναι $A(x)$. Για να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού, ολοκληρώνουμε αυτό το εμβαδόν από $x = a$ έως $x = b$:

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

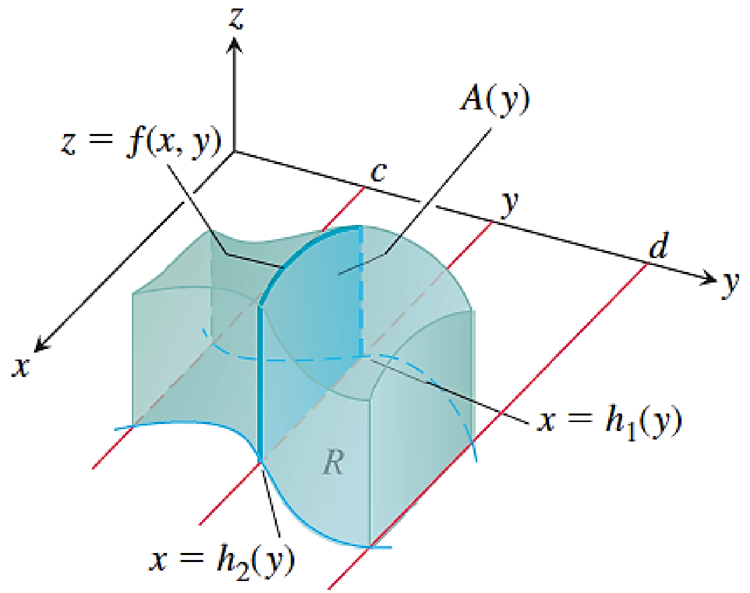
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Όγκοι

- Παρόμοια, αν το *R* είναι ένα χωρίο όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 15.11, φραγμένο από τις καμπύλες $x = h_2(y)$ και $x = h_1(y)$ και από τις ευθείες $y = c$ και $y = d$, τότε:

$$\text{Όγκος} = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



ΣΧΗΜΑ 15.11 Ο όγκος του στερεού που φαίνεται εδώ είναι

$$\int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Για δεδομένο στερεό, το Θεώρημα 2 λέει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο όπως στο Σχήμα 15.10, ή με τον τρόπο που φαίνεται εδώ. Και οι δύο υπολογισμοί έχουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Όγκοι

Θεώρημα του Fubini (ισχυρή μορφή)

- Έστω *f(x, y)* είναι συνεχής σε χωρίο R.

1. Αν το *R* ορίζεται από τις σχέσεις $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, και οι g_1 και g_2 είναι συνεχείς στο $[a, b]$, τότε

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

2. Αν το *R* ορίζεται από τις σχέσεις $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, και οι h_1 και h_2 είναι συνεχείς στο $[c, d]$, τότε

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Όγκοι

Άσκηση - Παράδειγμα

- Βρείτε τον όγκο του πρίσματος του οποίου η βάση είναι το τρίγωνο στο επίπεδο *xy* που φράσσεται από τον άξονα x και από τις $y = x$ και $x = 1$ και του οποίου η άνω πλευρά βρίσκεται στο επίπεδο $z = f(x, y) = 3 - x - y$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Όγκοι

(…συνέχεια)

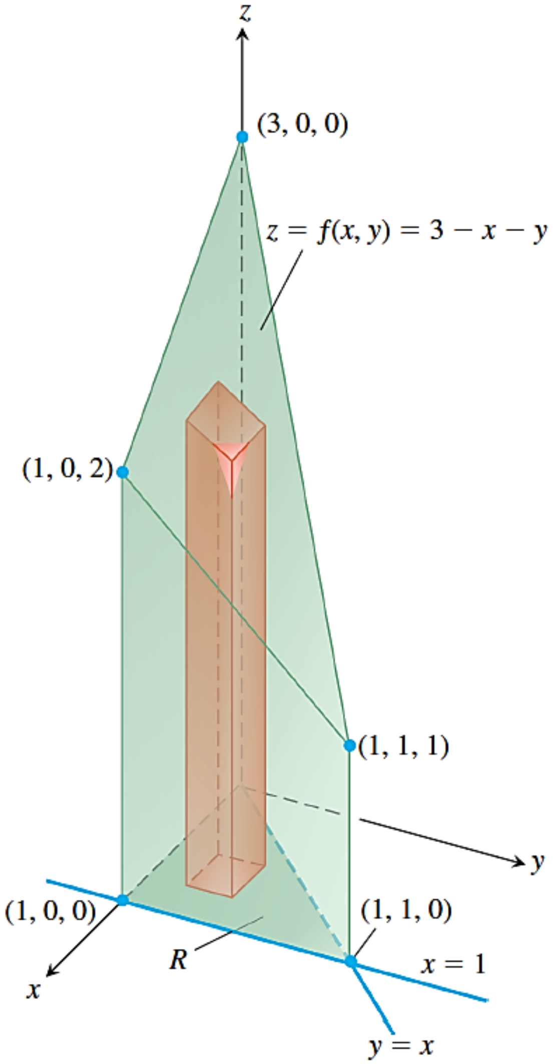
ΣΧΗΜΑ 15.12 (α) Πρίσμα με τριγωνική βάση στο επίπεδο xy. Ο όγκος αυτού του πρίσματος ορίζεται ως διπλό ολοκλήρωμα στο R. Για να τον υπολογίσουμε, μπορούμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και έπειτα ως προς x, ή αντίστροφα (Παράδειγμα 1).
(β) Τα όρια ολοκλήρωσης για το

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} f(x, y)\, dy\, dx.$$

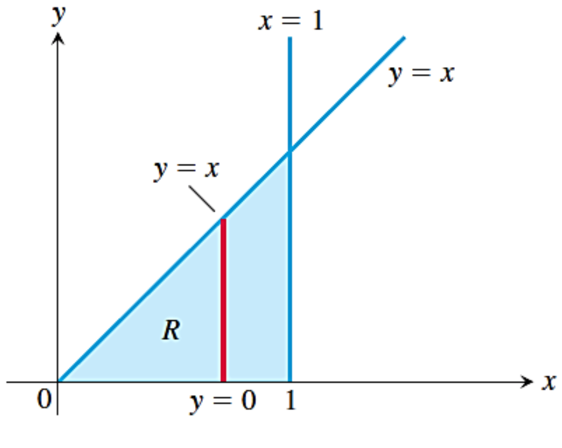
Αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y, ολοκληρώνουμε κατά μήκος μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το R και έπειτα ολοκληρώνουμε από αριστερά προς τα δεξιά για να συμπεριλάβουμε όλες τις κατακόρυφες ευθείες στο R.
(γ) Τα όρια ολοκλήρωσης για το

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} f(x, y)\, dx\, dy.$$

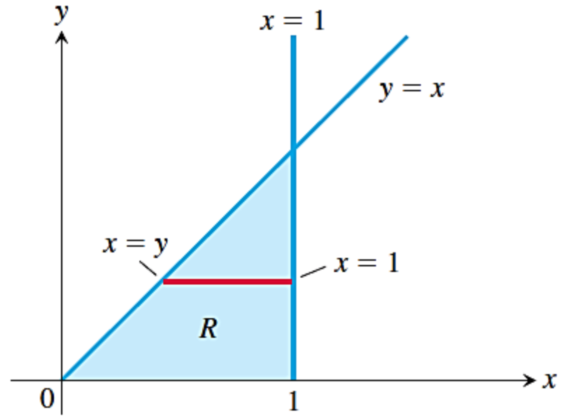
Αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x, ολοκληρώνουμε κατά μήκος μιας οριζόντιας ευθείας που διέρχεται από το R και έπειτα ολοκληρώνουμε από κάτω προς τα πάνω για να συμπεριλάβουμε όλες τις οριζόντιες ευθείες στο R.



(α)



(β)



(γ)

24 Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Όγκοι

(…συνέχεια) Λύση

$$V = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 1.$$

- Αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης (Σχήμα 15.12γ), το ολοκλήρωμα για τον όγκο είναι:

$$V = \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) dy = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1.$$

- Τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα, ως όφειλαν

25 Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

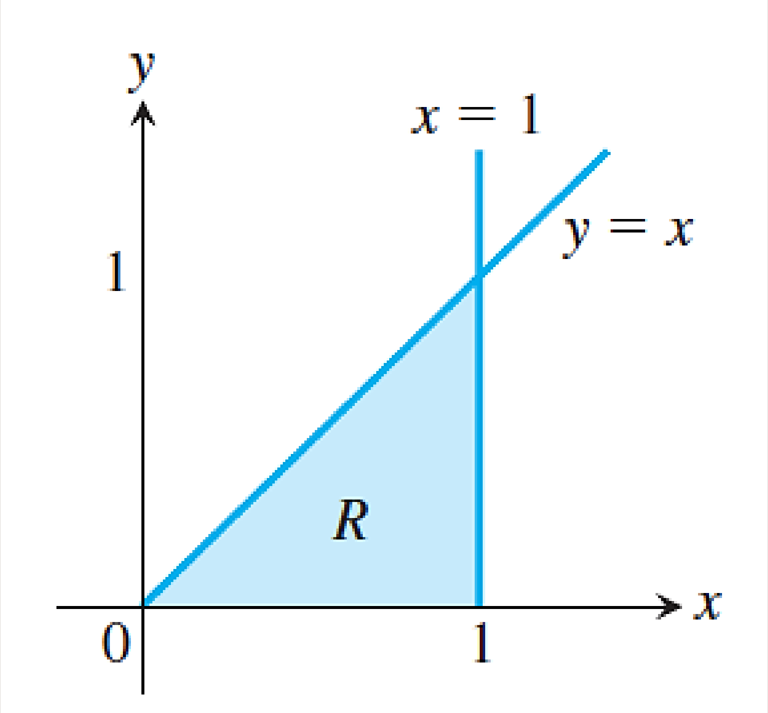
Όγκοι

Άσκηση - Παράδειγμα

- Υπολογίστε το

$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\,dA$$

όπου *R* είναι το τρίγωνο στο επίπεδο *xy* που φράσσεται από τον άξονα x, την ευθεία $y = x$, και την ευθεία $x = 1$



Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Όγκοι

<u>(…συνέχεια) Λύση</u>

- Αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς *y* και μετά ως προς *x*, βρίσκουμε

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[y \frac{\sin x}{x} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \sin x\, dx$$
$$= -\cos(1) + 1 \approx 0{,}46.$$

- Αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και αποπειραθούμε να υπολογίσουμε το

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy,$$

τότε αδυνατούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό, διότι το $\int (sinx/x)dx$ δεν μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει στοιχειωδών συναρτήσεων (δεν έχει απλή αντιπαράγωγο)

27 Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

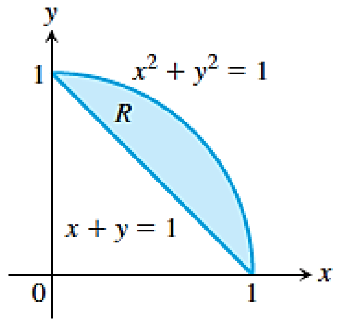
Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης

Χρήση κατακόρυφων διατομών

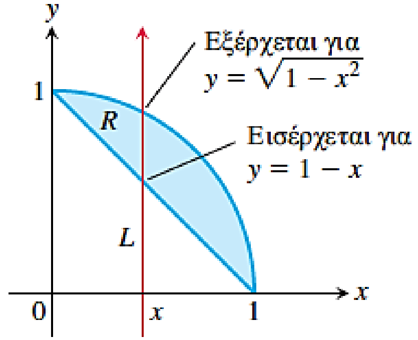
- Για να υπολογίσουμε το $\iint_R f(x, y)dA$ με ολοκλήρωση πρώτα ως προς *y* και έπειτα ως προς x

    1. *Σχήμα*. Σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης και ονομάζουμε τις καμπύλες που το περικλείουν (Σχήμα 15.14α).
    2. *Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης στον άξονα y.* Φανταζόμαστε μια κατακόρυφη ευθεία *L* που τέμνει το *R* στην κατεύθυνση αύξησης του y. Σημειώνουμε τις τιμές του y που αντιστοιχούν στα σημεία εισόδου και εξόδου της *L* από το χωρίο. Οι τιμές αυτές είναι τα όρια ολοκλήρωσης ως προς y (Σχήμα 15.14β)
    3. *Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης στον άξονα x*. Επιλέγουμε όρια ολοκλήρωσης ως προς x που περιέχουν όλες τις κατακόρυφες ευθείες που διέρχονται από το *R* (Σχήμα 15.14γ)

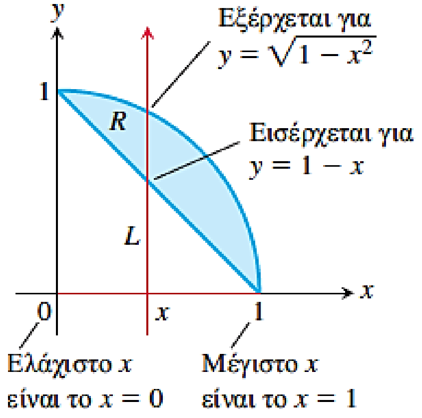
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx$$



(α)



(β)



(γ)

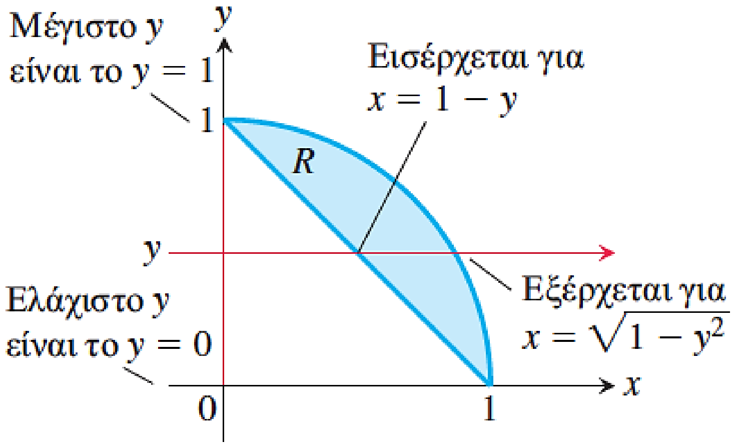
Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης

Χρήση οριζόντιων διατομών

- Για να υπολογίσουμε το ίδιο διπλό ολοκλήρωμα με αντίστροφη σειρά ολοκλήρωσης, χρησιμοποιούμε οριζόντιες ευθείες αντί για κατακόρυφες στα Βήματα 2 και 3
- Το ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$$



Σχημα 15.15 Εύρεση των ορίων ολοκλήρωσης όταν ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x και μετά ως προς y.

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης

Άσκηση - Παράδειγμα

- Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης για το παρακάτω ολοκλήρωμα και γράψτε ένα ισοδύναμο ολοκλήρωμα με αντίστροφη σειρά ολοκλήρωσης

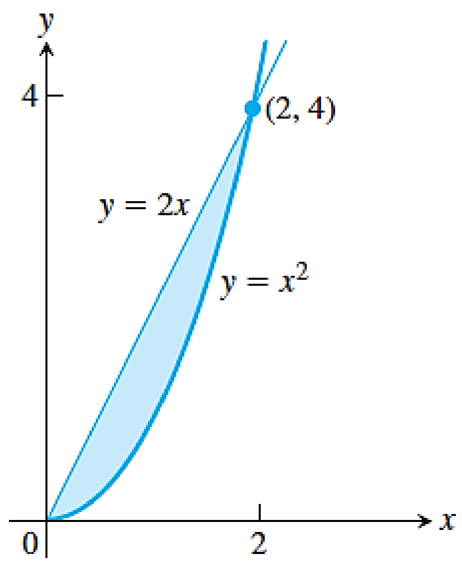
$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy\, dx$$

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία
Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης

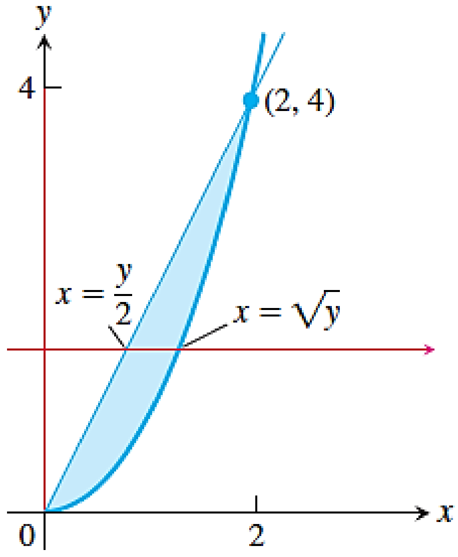
<u>(…συνέχεια) Λύση</u>

- Το χωρίο ολοκλήρωσης δίνεται από τις ανισότητες $x^2 \leq y \leq 2x$ και $0 \leq x \leq 2$
- Πρόκειται λοιπόν για το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = 2x$ μεταξύ των $x = 0$ και $x = 2$
- Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης για την αντίστροφη σειρά, φανταζόμαστε μια οριζόντια ευθεία που διαπερνά το χωρίο από αριστερά προς τα δεξιά
- Η ευθεία εισέρχεται στο χωρίο για $x = \frac{y}{2}$ και εξέρχεται για $x = \sqrt{y}$
- Για να συμπεριλάβουμε όλες τις ευθείες τέτοιου τύπου, δίνουμε στο *y* τιμές από *y* = 0 έως *y* = 4
- Το ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2)\, dx\, dy.$$



(α)



(β)

31 Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων

Αν οι $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι συνεχείς στο φραγμένο χωρίο R, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

1. *Σταθερό πολλαπλάσιο:*

$$\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA \quad (\text{τυχών αριθμός } c)$$

2. *Άθροισμα και διαφορά:*

$$\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y))\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA \pm \iint_R g(x, y)\, dA$$

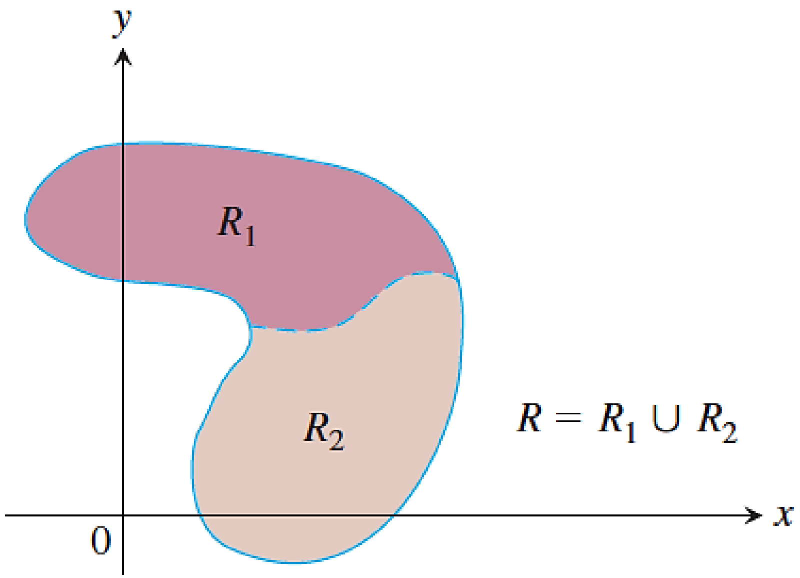
3. *Φράγματα:*

(α) $$\iint_R f(x, y)\, dA \geq 0 \quad \text{αν} \quad f(x, y) \geq 0 \text{ στο } R$$

(β) $$\iint_R f(x, y)\, dA \geq \iint_R g(x, y)\, dA \quad \text{αν} \quad f(x, y) \geq g(x, y) \text{ στο } R$$

4. *Προσθετικότητα:* Αν R είναι η ένωση δύο μη επικαλυπτόμενων χωρίων R_1 και R_2, τότε

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$



$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

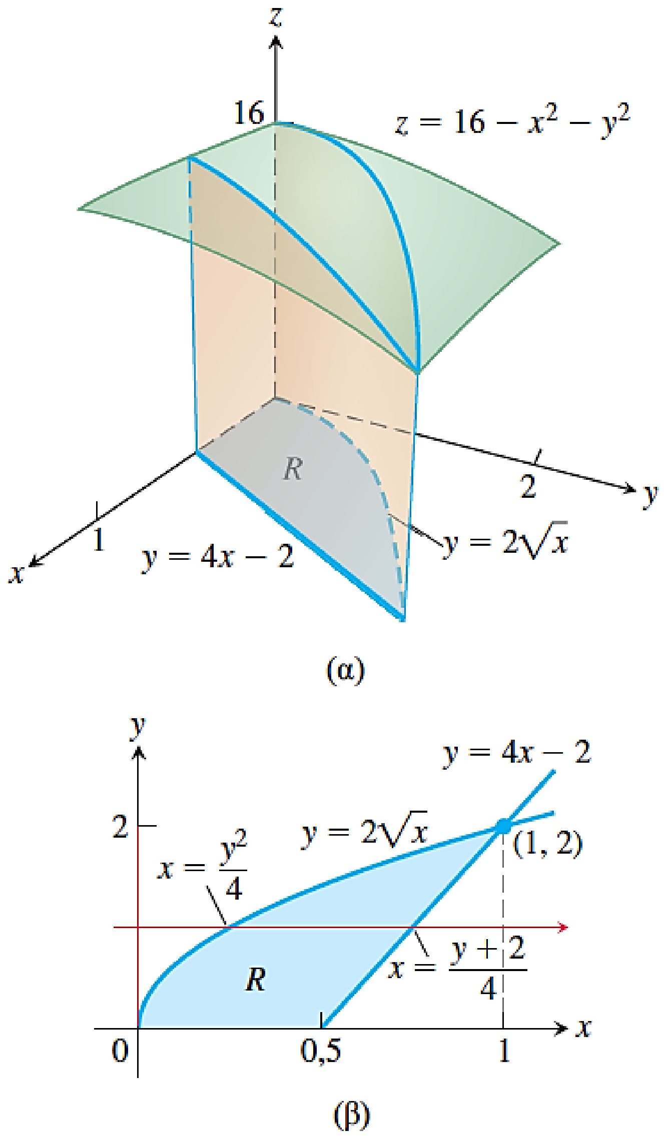
ΣΧΗΜΑ 15.17 Η ιδιότητα της προσθετικότητας για ορθογώνια χωρία ισχύει για χωρία που φράσσονται από λείες καμπύλες.

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων

Άσκηση - Παράδειγμα

- Βρείτε τον όγκο του σφηνοειδούς στερεού που κείται κάτω από την επιφάνεια $z = 16 - x^2 - y^2$ και πάνω από το χωρίο R που φράσσεται από την καμπύλη $y = 2\sqrt{x}$, την ευθεία $y = 4x - 2$, και τον άξονα x



ΣΧΗΜΑ 15.18 (α) Η στερεή «σφηνοειδής» περιοχή της οποίας τον όγκο βρίσκουμε στο Παράδειγμα 4. (β) Το χωρίο ολοκλήρωσης R που υποδεικνύει τη σειρά $dx\,dy$.

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικά Χωρία

Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων

(…συνέχεια) Λύση

- Αν ολοκληρώσουμε με τη σειρά $dy\,dx$ (πρώτα ως προς y και μετά ως προς x), απαιτούνται δύο ολοκληρώσεις, διότι το y μεταβάλλεται:
  - από $y = 0$ έως $y = 2\sqrt{x}$ για $0 \leq x \leq 0{,}5$ και έπειτα μεταβάλλεται
  - $y = 4x - 2$ έως $y = 2\sqrt{x}$ για $0{,}5 \leq x \leq 1$
- Έτσι επιλέγουμε να ολοκληρώσουμε με τη σειρά $dx\,dy$, η οποία απαιτεί μόνο ένα διπλό ολοκλήρωμα με τα όρια να φαίνονται στο Σχήμα 15.18β

$$\text{Όγκος} = \iint_R (16 - x^2 - y^2)dA = \int_0^2 \int_{y^2/4}^{(y+2)/4} (16 - x^2 - y^2)dx\,dy = \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - xy^2\right]_{x=y^2/4}^{x=(y+2)/4} dy$$

$$= \int_0^2 \left[4(y+2) - \frac{(y+2)^3}{3 \cdot 64} - \frac{(y+2)y^2}{4} - 4y^2 + \frac{y^6}{3 \cdot 64} + \frac{y^4}{4}\right] dy = \left[\frac{191y}{24} + \frac{63y^2}{32} - \frac{145y^3}{96} - \frac{49y^4}{768} + \frac{y^5}{20} + \frac{y^7}{1344}\right]_0^2$$

$$= \frac{20{,}803}{1680} \approx 12{,}4$$

Εμβαδόν Διπλής Ολοκλήρωσης

Εμβαδά φραγμένων χωρίων στο επίπεδο

- Αν στον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος σε ένα χωρίο *R, θέσουμε* $f(x,y)=1$*, τα αθροίσματα Riemann* ανάγονται στη μορφή:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k \;=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k$$

- Η έκφραση αυτή δεν είναι παρά το άθροισμα των εμβαδών των μικρών ορθογωνίων που προκύπτουν από τη διαμέριση του *R,* και προσεγγίζοντας αυτό που θα θέλαμε να ονομάζουμε εμβαδόν του *R*
- Ορίζουμε ως εμβαδόν του *R* το όριο:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k \;=\iint_R dA$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το εμβαδόν ενός κλειστού, φραγμένου χωρίου *R*

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Εμβαδόν Διπλής Ολοκλήρωσης

Εμβαδά φραγμένων χωρίων στο επίπεδο

Άσκηση - Παράδειγμα

- Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου R που φράσσεται από τις $y = x$ και $y = x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο

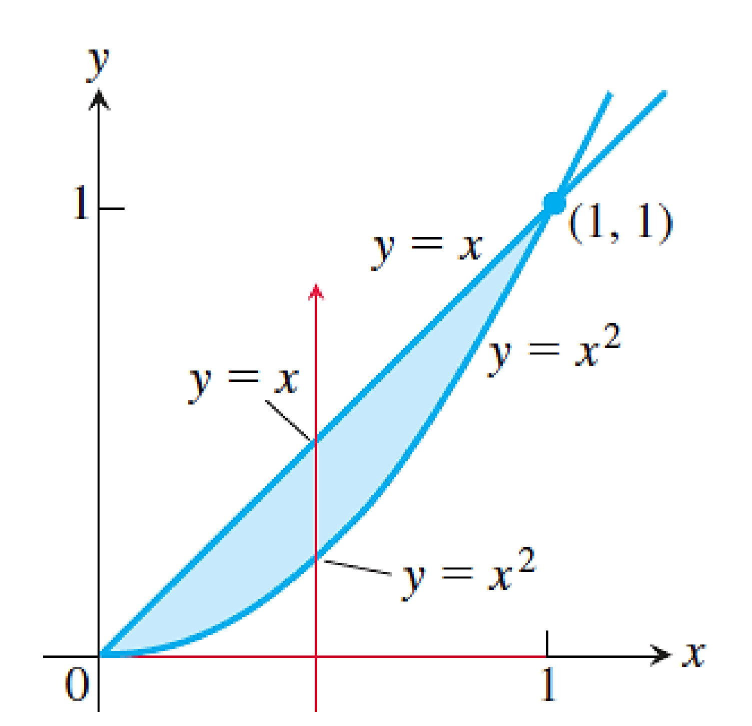
Λύση

- Σχεδιάζουμε το χωρίο, σημειώνοντας τα σημεία τομής των δύο καμπυλών με την αρχή των αξόνων και το σημείο (1, 1), και υπολογίζουμε το εμβαδόν ως

$$A = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx = \int_0^1 \Big[y \Big]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Το ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι αυτό της μονής ολοκλήρωσης



36 Εμβαδόν Διπλής Ολοκλήρωσης

Εμβαδά φραγμένων χωρίων στο επίπεδο

Άσκηση - Παράδειγμα

- Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου *R* που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = x + 2$

<u>Λύση</u>

- Αν διαιρέσουμε το *R* στα χωρία *R1* και *R2*, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ως εξής

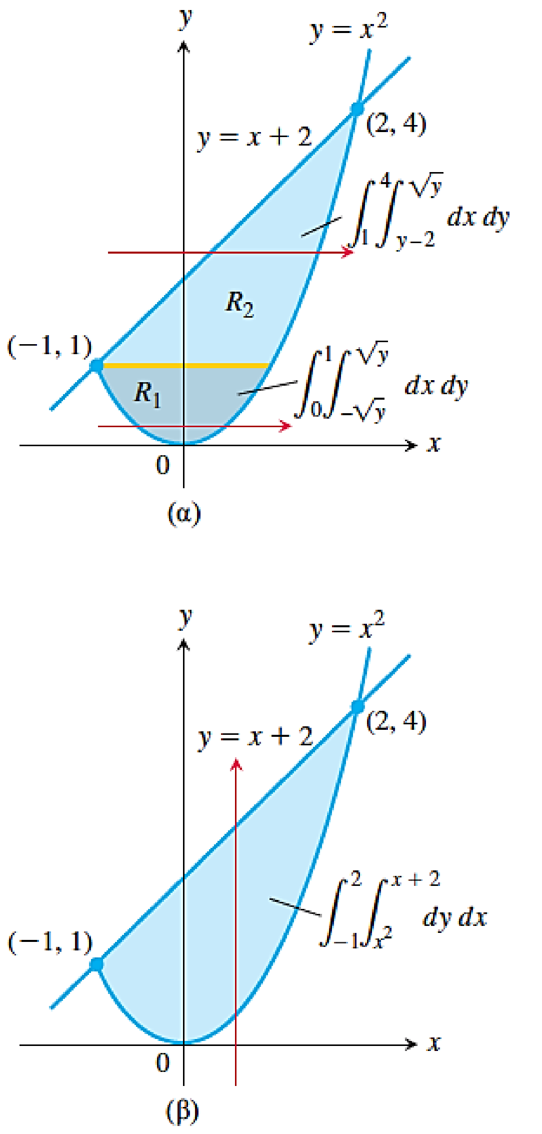
$$A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$$

- Από την άλλη μεριά, αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy\,dx$$

- Το αποτέλεσμα αυτό, που απαιτεί τον υπολογισμό ενός μόνο διπλού ολοκληρώματος, είναι απλούστερο και δίνει

$$A = \int_{-1}^{2} \Big[y \Big]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$



ΣΧΗΜΑ 15.20 Ο υπολογισμός του εμβαδού αυτού απαιτεί (α) δύο διπλά ολοκληρώματα αν η πρώτη ολοκλήρωση γίνει ως προς *x*, αλλά (β) μόνο ένα αν η πρώτη ολοκλήρωση γίνει ως προς *y* (Παράδειγμα 2).

Εμβαδόν Διπλής Ολοκλήρωσης

Μέση τιμή

- Η μέση τιμή μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης μίας μεταβλητής σε κλειστό διάστημα ισούται με το πηλίκο του ολοκληρώματος της συνάρτησης στο διάστημα αυτό διά το μήκος του διαστήματος
- Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών ορισμένη σε ένα φραγμένο χωρίο στο επίπεδο, η μέση τιμή ισούται με το πηλίκο του ολοκληρώματος της συνάρτησης στο χωρίο αυτό διά το εμβαδόν του χωρίου

Μέση τιμή της f στο R

$$\frac{1}{\text{εμβαδόν του } R}\iint_R f\,dA$$

Εμβαδόν Διπλής Ολοκλήρωσης

Μέση τιμή

Άσκηση - Παράδειγμα

- Βρείτε τη μέση τιμή της $f(x,y) = x\cos xy$ στο ορθογώνιο $R: 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 1$

<u>Λύση</u>

- Η τιμή του ολοκληρώματος της *f* στο *R* είναι

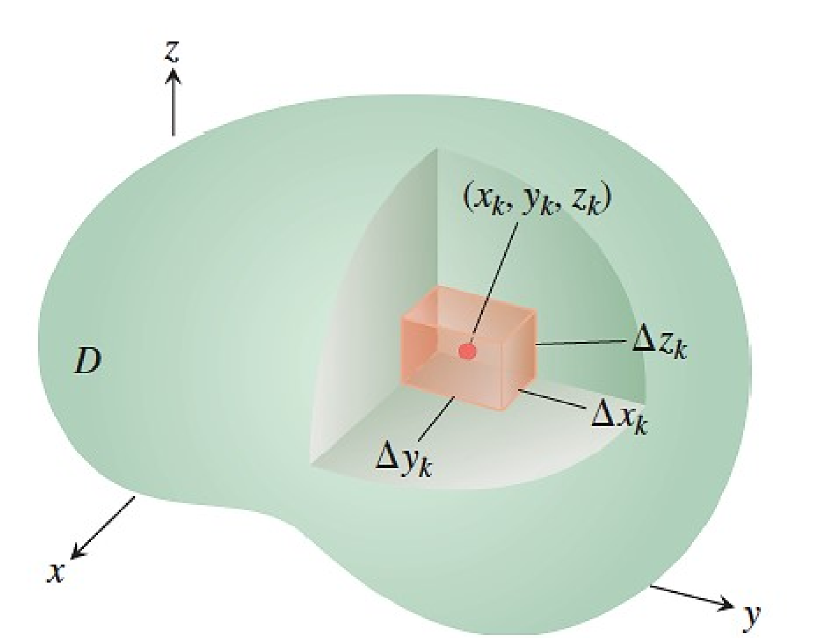
$$\int_0^\pi \int_0^1 x\cos xy\,dy\,dx = \int_0^\pi [\sin xy]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^\pi (\sin x - 0)dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = 2$$

- Το εμβαδόν του *R* ισούται με π
- Άρα, η μέση τιμή της *f* στο *R* είναι 2/π

39 Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Τριπλά ολοκληρώματα

- Χρησιμοποιούμε τριπλά ολοκληρώματα για να υπολογίσουμε τους όγκους τρισδιάστατων σχημάτων και τη μέση τιμή μιας συνάρτησης σε ένα τρισδιάστατο χωρίο
- Αν η $F(x, y, z)$ είναι μια συνάρτηση που ορίζεται σε κλειστό φραγμένο χωρίο *D* του χώρου, όπως εκείνο που καταλαμβάνεται από μια στερεή σφαίρα ή ένα κομμάτι πηλού, τότε το ολοκλήρωμα της *F* πάνω στο *D* μπορεί να οριστεί με τον ακόλουθο τρόπο
- Διαμερίζουμε ένα ορθογώνιο κιβωτιοειδές χωρίο που περιέχει το *D* σε ορθογώνιες κυψελίδες (παραλληλεπίπεδα)
- Αριθμούμε τις κυψελίδες που κείνται εξ ολοκλήρου εντός του *D* από 1 έως *n* με κάποια σειρά, με την k-οστή κυψελίδα να έχει διαστάσεις Δx_k επί Δy_k επί Δz_k και όγκο $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$



Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Τριπλά ολοκληρώματα

- Επιλέγουμε ένα σημείο (x_k, y_k, z_k) σε κάθε κυψελίδα και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

- Αν η *F* είναι συνεχής και η συνοριακή επιφάνεια του *D* σχηματίζεται από πεπερασμένες το πλήθος λείες επιφάνειες, ενωμένες κατά μήκος πεπερασμένων το πλήθος λείων καμπυλών, τότε η *F* είναι ολοκληρώσιμη
- Καθώς $\|P\| \to 0$ και $n \to \infty$, τα αθροίσματα S_n τείνουν σε ένα όριο, που ονομάζεται τριπλό ολοκλήρωμα της ***F*** στο ***D*** και γράφουμε

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(x,y,z)dV \text{ ή } \lim_{\|P\|\to 0} S_n = \iiint_D F(x,y,z)dxdydz$$

Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Όγκος χωρίου του χώρου

- Αν η *F* είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή 1, τότε τα αθροίσματα γράφονται στη μορφή

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

- Καθώς τα $\Delta x_k, \Delta y_k$, και Δz_k τείνουν στο μηδέν, οι κυψελίδες ΔV_k γίνονται μικρότερες και περισσότερες και καλύπτουν ολοένα και περισσότερο μέρος του *D*

- Επομένως, ορίζουμε ως όγκο του χωρίου *D* το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint_D dV$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο όγκος ενός κλειστού, φραγμένου χωρίου *D* στον χώρο

Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης με τη σειρά $dz\,dy\,dx$

- Τα τριπλά ολοκληρώματα υπολογίζονται με εφαρμογή μιας τρισδιάστατης εκδοχής του θεωρήματος του Fubini, δηλαδή με τη διαδοχική εκτέλεση τριών απλών (δηλ. ως προς μία μεταβλητή) ολοκληρώσεων
- Τα όρια ολοκλήρωσης για καθένα από αυτά τα τρία ολοκληρώματα βρίσκονται μέσω μιας γεωμετρικής διαδικασίας παρόμοιας με εκείνη που εφαρμόσαμε για τα διπλά ολοκληρώματα
- Για να υπολογίσουμε το

$$\iiint\limits_D F(x,y,z)\,dV$$

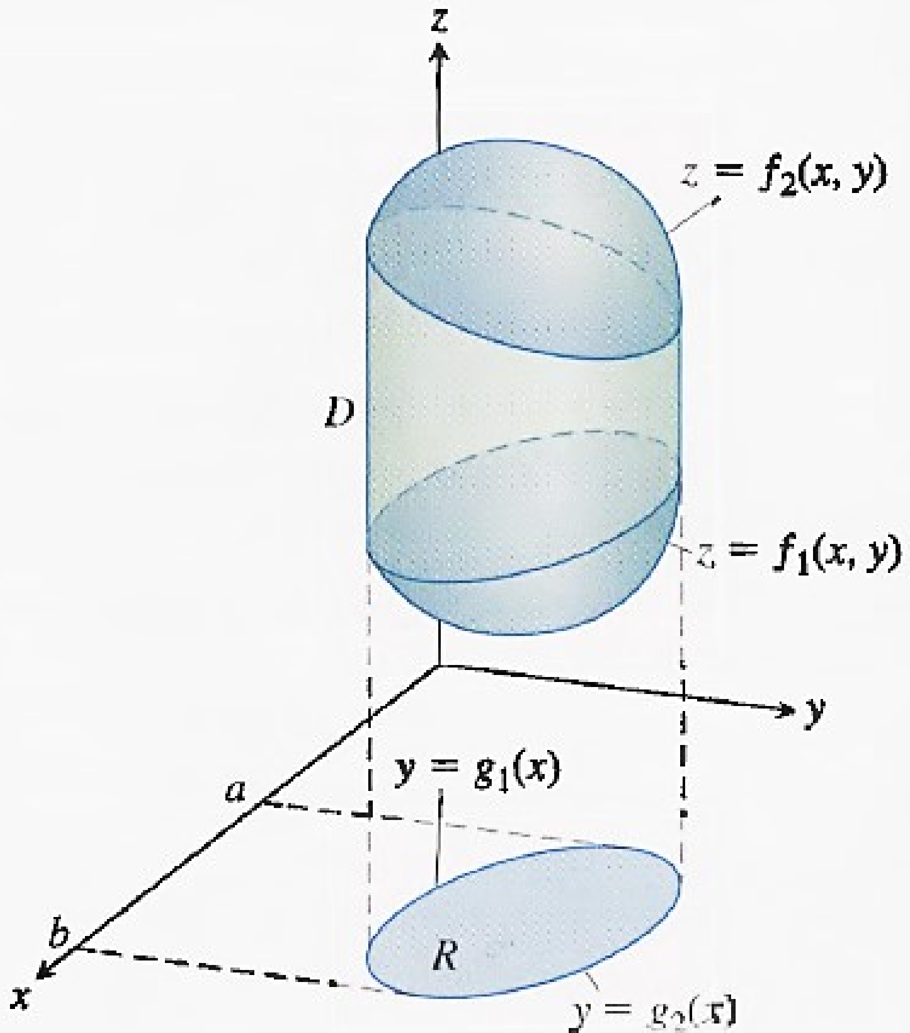
σε ένα χωρίο *D*, ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς z, έπειτα ως προς y, και ως προς x (μπορείτε να επιλέξετε διαφορετική σειρά ολοκλήρωσης)

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης με τη σειρά $dz\,dy\,dx$

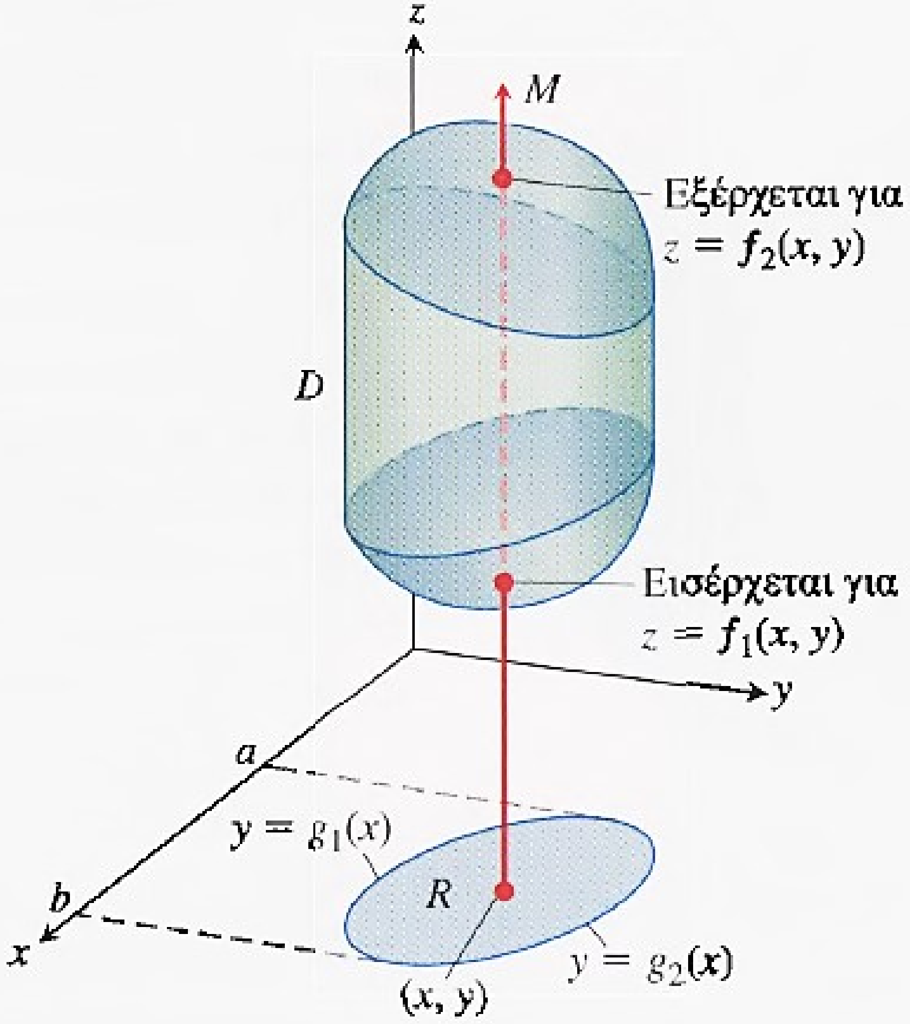
1. *Σχήμα*. Σχεδιάζουμε το χωρίο *D* καθώς και τη «σκιά» του (κατακόρυφη προβολή), *R*, στο επίπεδο xy. Ονομάζουμε στο σχήμα την πάνω και την κάτω συνοριακή επιφάνεια του *D* καθώς και τις συνοριακές καμπύλες του *R*.



Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης με τη σειρά $dz\,dy\,dx$

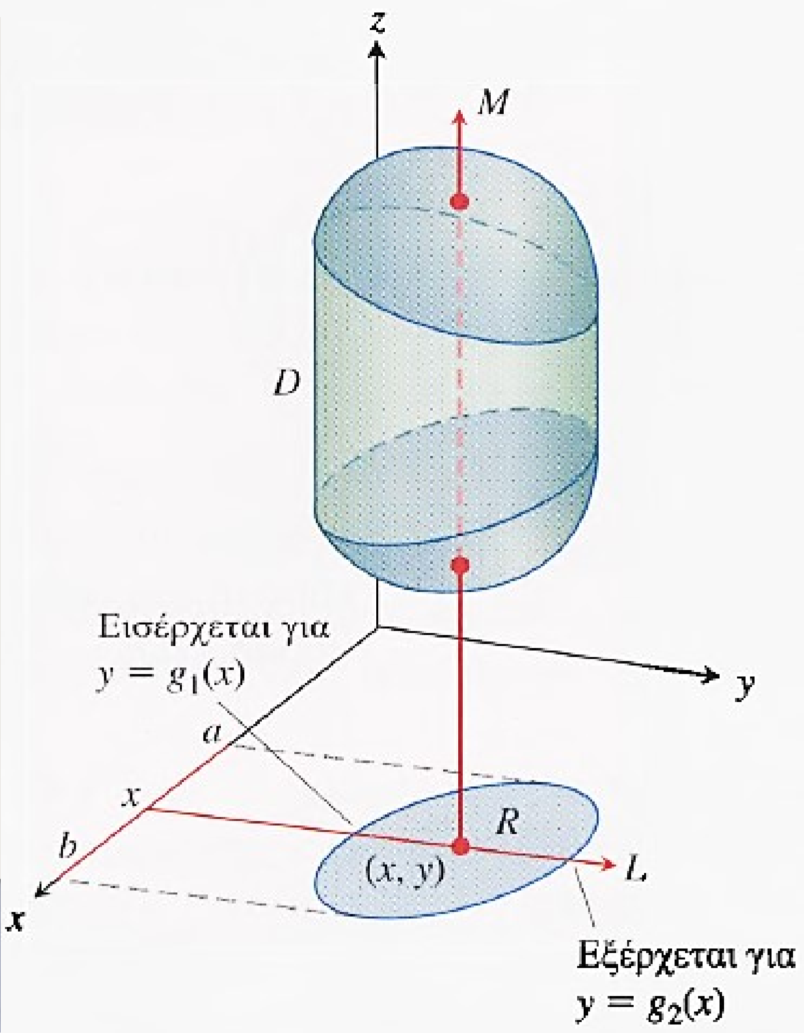
2. *Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης για το z.* Φέρνουμε μια ευθεία M που διέρχεται από ένα τυπικό σημείο (x, y) του *R* και είναι παράλληλη στον άξονα z. Καθώς το z αυξάνει, η M εισέρχεται στο *D* όταν $z = f_1(x, y)$ και εξέρχεται όταν $z = f_2(x, y)$. Αυτά είναι τα όρια ολοκλήρωσης για το *z*.



Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης με τη σειρά $dz\,dy\,dx$

3. *Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης για το y.* Φέρνουμε μια ευθεία L που διέρχεται από το (x, y) και είναι παράλληλη στον άξονα y. Καθώς το y αυξάνει, η L εισέρχεται στο *R* για $y = g_1(x)$ και εξέρχεται για $y = g_2(x)$. Αυτά είναι τα όρια ολοκλήρωσης για το y.



ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

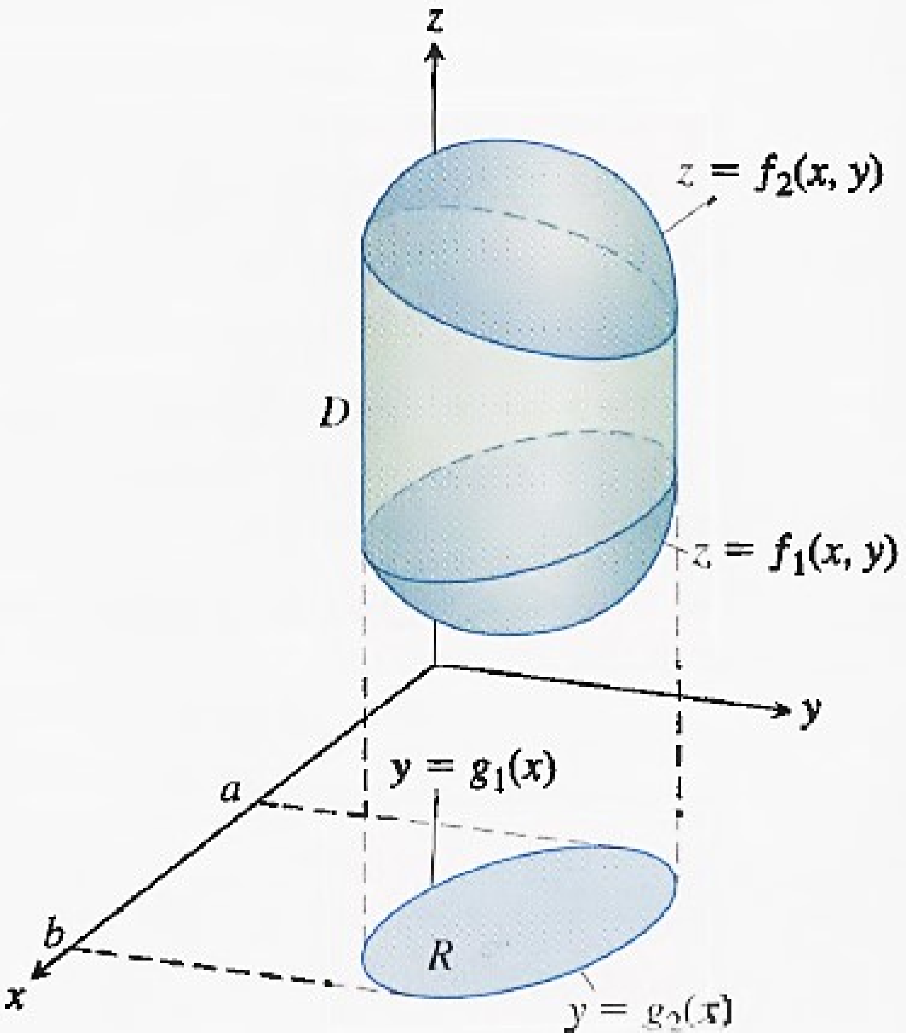
46 Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης με τη σειρά $dz\,dy\,dx$

4. *Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης για το x.* Επιλέγουμε τιμές του x που περιλαμβάνουν όλες τις ευθείες που διέρχονται από το *R* και είναι παράλληλες στον άξονα y ($x = \alpha$ και $x = b$ στο σχήμα). Αυτά είναι τα όρια ολοκλήρωσης για το x. Το ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

- Παρόμοια διαδικασία ακολουθούμε αν αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Η «σκιά» του χωρίου *D* βρίσκεται στο επίπεδο των τελευταίων δύο μεταβλητών ως προς τις οποίες λαμβάνει χώρα η διαδοχική ολοκλήρωση



Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

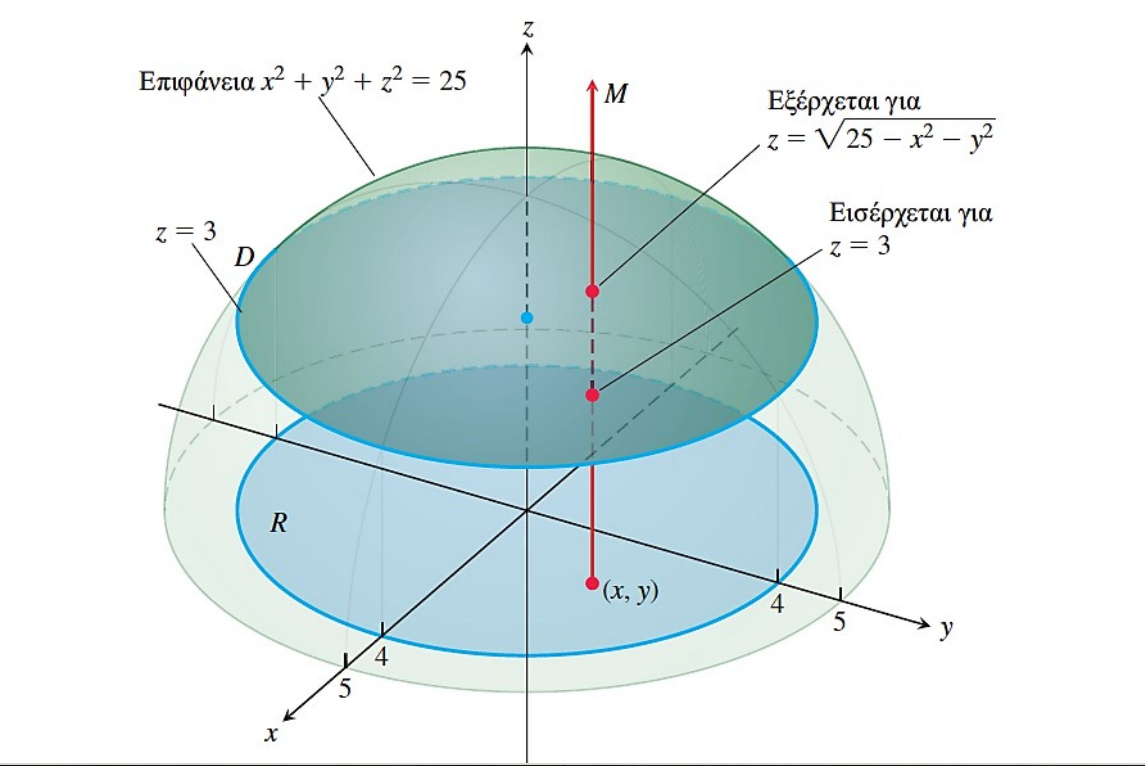
Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης με τη σειρά $dz\, dy\, dx$

Άσκηση – Παράδειγμα

- Έστω S η σφαίρα ακτίνας 5 με κέντρο στην αρχή και D το χωρίο κάτω από τη σφαίρα που βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z = 3$. Βρείτε τα όρια ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $F(x, y, z)$ στο χωρίο D.

<u>Λύση</u>

- Το χωρίο κάτω από τη σφαίρα που βρίσκεται πάνω από το $z = 3$ περικλείεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ και $z = 3$
- Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης, κάνουμε πρώτα ένα σχέδιο του χωρίου
- Το χωρίο-σκιά *R* στο επίπεδο xy είναι κύκλος κάποιας ακτίνας με κέντρο στην αρχή

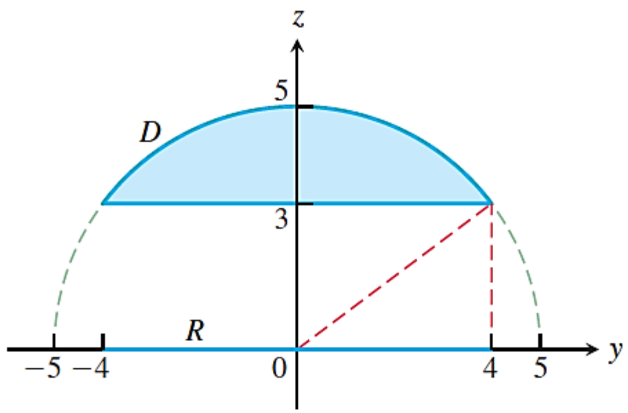


Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

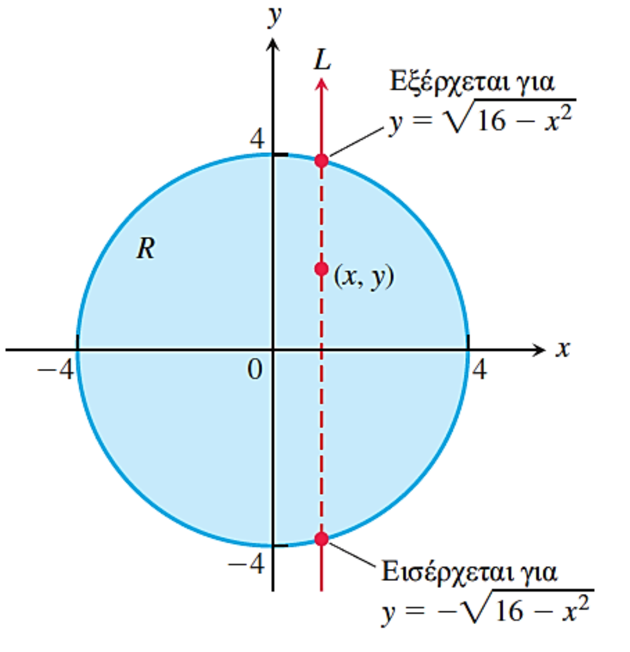
Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης με τη σειρά $dz\, dy\, dx$

(…συνέχεια) Λύση

- Εξετάζοντας μια πλευρική όψη του χωρίου *D*, μπορούμε να προσδιορίσουμε (π.χ. με Πυθαγόρειο θεώρημα) ότι η ακτίνα αυτού του κύκλου είναι ίση με 4 (Σχήμα α)
- Αν διαλέξουμε ένα σημείο (x, y) του *R* και φέρουμε την κατακόρυφη ευθεία M πάνω από το (x, y), βλέπουμε ότι η ευθεία αυτή εισέρχεται στο D για $z = 3$ και εξέρχεται για $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Αυτά είναι τα όρια ολοκλήρωσης για το z.
- Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης για το y, θεωρούμε την ευθεία L που κείται στο χωρίο *R*, διέρχεται από το σημείο (x, y), και είναι παράλληλη στον άξονα y. Για ευκρίνεια, έχουμε σχεδιάσει χωριστά το χωρίο *R* και *L* στο Σχήμα β.
- Η ευθεία *L* εισέρχεται στο *R* για $y = -\sqrt{16 - x^2}$ και εξέρχεται για $y = \sqrt{16 - x^2}$. Αυτά είναι τα όρια ολοκλήρωσης για το y.



(α)



(β)

Τριπλά Ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης με τη σειρά $dz\, dy\, dx$

<u>(…συνέχεια) Λύση</u>

- Τέλος, καθώς η *L* σαρώνει το *R* από αριστερά προς τα δεξιά, η τιμή του x μεταβάλλεται από $x = -4$ έως $x = 4$. Αυτά είναι και τα όρια ολοκλήρωσης για το x

- Επομένως, το τριπλό ολοκλήρωμα της *F* στο χωρίο *D* είναι

$$\iiint_D F(x,y,z)dzdydx = \int_{x=-4}^{x=4}\int_{y=-\sqrt{16-x^2}}^{y=\sqrt{16-x^2}}\int_{z=3}^{z=\sqrt{25-x^2-y^2}} F(x,y,z)dz\,dy\,dx$$