Ασκήσεις Εφαρμογές Παραγώγων

1. Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:
   a. $f(x) = x^{4/3}$ στο [-1,8].
   b. $f(x) = -\sqrt{5 - x^2}$ στο $[-\sqrt{5}, 0]$.
   c. $f(x) = 3x^{2/3}$ στο [-27,8].

2. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία, οι περιοχές που είναι αύξουσες ή φθίνουσες, και τα τοπικά ακρότατα των ακόλουθων συναρτήσεων:
   a. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.
   b. $f(x) = x - 6\sqrt{x - 1}$.
   c. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.
   d. $f(x) = \sqrt[3]{x}(x + 8)$.

3. Να μελετηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις και να γίνει μία εκτίμηση της γραφικής τους παράστασης, βρίσκοντας τοπικά μέγιστα και ελάχιστα, σημεία καμπής, μονοτονίες, κοιλότητες, και ασύμπτωτες:
   a. $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$.
   b. $f(x) = -\frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$.
   c. $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2}$.

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΠΘ

Λύσεις

1.
   a. Παραγωγίσιμη στο [-1,8].

   $f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} = 0 => x = 0$

   $f(-1) = 1 \quad f(0) = 0 \quad f(8) = 16$

   b. Παραγωγίσιμη στο [-$-\sqrt{5}$,0].

   $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 => x = 0$

   $f\left(-\sqrt{5}\right) = 0 \quad f(0) = -\sqrt{5}$

   c. $f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

   Δεν μηδενίζεται, δεν ορίζεται για x=0

   $f(-27) = 27 \quad f(0) = 0 \quad f(8) = 12$

2.
   a. Ορίζεται, είναι συνεχής, και είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

   $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$

   Κρίσιμα σημεία x=-2, x=0, x=2. Άκρα -∞ και +∞.

   -∞ φθίνουσα -2 αύξουσα 0 φθίνουσα 2 αύξουσα +∞

   Ελάχιστα στα -2 και 2. Μέγιστο στο 0

   b. Ορίζεται στο [1,+∞). Συνεχής σε αυτό.

   $f'(x) = 1 - 3\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

   Κρίσιμο σημείο x=10.

   1 φθίνουσα 10 αύξουσα +∞.

   Ελάχιστο στο 10.

   c. Δεν ορίζεται στο 2.

   $f'(x) = \frac{(x-2)2x-(x^2-3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$.

   Κρίσιμα σημεία x=1, x=2, x=3.

   -∞ αύξουσα 1 φθίνουσα 2 φθίνουσα 3 αύξουσα +∞.

   Ελάχιστο στο 3. Μέγιστο στο 1.

   d. Ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής.

   $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+8)$.

Κρίσιμα σημεία x=-2, x=0.

-∞ φθίνουσα -2 αύξουσα 0 αύξουσα +∞

3.

a. $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$.

Δεν ορίζεται στο x=±1.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)} = 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = \pm\infty \quad \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(2x^2+x-1)' - (x^2-1)'(2x^2+x-1)}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+2x+1}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Η *f'* δεν μηδενίζει σε κανένα σημείο και δεν ορίζεται στο x=1.

Είναι πάντα αρνητική, άρα η f είναι πάντα φθίνουσα.

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Η *f''* δεν μηδενίζει πουθενά και δεν ορίζεται στο x=1. Δεν έχει σημεία καμπής.

Για x<1 είναι *f''*<0, άρα η *f* έχει τα κοίλα κάτω. Για x>1 είναι *f''*>0, άρα η *f* έχει τα κοίλα πάνω

b. $f(x) = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$.

Δεν ορίζεται στο x=±1.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{x^2-2}{x^2-1}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to 1} \left(-\frac{x^2-2}{x^2-1}\right) = \pm\infty \quad \lim_{x\to -1} \left(-\frac{x^2-2}{x^2-1}\right) = \pm\infty$$

$$f'(x) = -\frac{(x^2-1)(x^2-2)' - (x^2-1)'(x^2-2)}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

Η *f'* μηδενίζει στο 0 και δεν ορίζεται στα x=±1.

Για x<0 είναι *f'*>0, άρα η *f* αύξουσα. Για x>0 είναι *f'*<0, άρα η *f* φθίνουσα. Άρα x=0 τοπικό μέγιστο.

$$f''(x) = \left(-\frac{2x}{(x^2-1)^2}\right)' = -\frac{(x^2-1)^2(2x)' - ((x^2-1)^2)'2x}{(x^2-1)^4} = -\frac{2(x^2-1)-8x^2}{(x^2-1)^3} = 2\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$$

Η *f''* δεν μηδενίζει πουθενά και δεν ορίζεται στο x=±1. Δεν έχει σημεία καμπής.

Για -1<x<1 είναι *f''*<0, άρα η *f* έχει τα κοίλα κάτω. Για άλλα x είναι *f''*<0, άρα η *f* έχει τα κοίλα κάτω

c. $f(x) = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)^3}{(x-1)(x+2)}$.

Δεν ορίζεται στα x=1 και x=-2.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x-1)(x+2)}=0 \quad \lim_{x\to -2}\frac{(x-1)^3}{(x-1)(x+2)}=\pm\infty$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+x-2)(x^3-3x^2+3x-1)'-(x^2+x-2)'(x^3-3x^2+3x-1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{x^4+2x^3-12x^2+14x-5}{(x^2+x-2)^2}=\frac{(x-1)^3(x+5)}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

Η *f'* μηδενίζει στο -5 και δεν ορίζεται στα x=1 και x=-2.

Για -5<x<1 είναι *f'*<0, άρα η f φθίνουσα. Για άλλα x είναι *f'*>0, άρα η f αύξουσα.

Άρα x=-5 τοπικό μέγιστο και x=1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού για να είναι τοπικό ελάχιστο.

$$f''(x)=\left(\frac{(x-1)^3(x+5)}{(x-1)^2(x+2)^2}\right)'=\frac{18(x-1)^4}{(x-1)^4(x+2)^3}=$$

Η *f''* δεν μηδενίζει πουθενά και δεν ορίζεται στα x=1 και x=-2. Δεν έχει σημεία καμπής.

Για x<-2 είναι *f''*<0, άρα η *f* έχει τα κοίλα κάτω. Για x>-2 είναι *f''*>0, άρα η *f* έχει τα κοίλα πάνω