Μαθηματικά Ι

Εφαρμογές Παραγώγων

Ιωάννης Τσιμπερίδης
itsimper@cs.duth.gr

Μέγιστα και Ελάχιστα

Για μια συνάρτηση f, όπου στο πεδίο ορισμού της D υπάρχει σημείο c, τέτοιο ώστε ισχύει:

$$f(c) \geq f(x) \qquad \forall\, x \in D$$

λέγεται ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο c.

Επίσης, εάν ισχύει:

$$f(c) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in D$$

λέγεται ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο c.

Ακόμα, εάν για το c ισχύει ότι $f(c) \geq f(x)$ σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το c, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο**, ενώ εάν ισχύει $f(c) \leq f(x)$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο**.

Μια συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε κλειστό διάστημα παρουσιάζει και ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.

Παράγωγος και Ακρότατα

Διαισθητικά, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μία συνάρτησης στο σημείο που παρουσιάζει τοπικό ή ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, είναι παράλληλη με τον άξονα x.

Δηλαδή, για το σημείο c, στο οποίο παρουσιάζεται ακρότατο, αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης, ισχύει:

$$f'(c) = 0$$

Το αντίθετο όμως δεν ισχύει. Δηλαδή εάν η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης μηδενίζεται σε σημείο, δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι είναι ακρότατο.

Γενικώς, ακρότατα μιας συνάρτησης μπορεί να παρουσιάζονται:

- Στα άκρα του πεδίου ορισμού της.
- Στα σημεία που η πρώτη παράγωγός της μηδενίζεται.
- Στα σημεία που η πρώτη παράγωγός της δεν ορίζεται.

Τα σημεία όπου η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται ή δεν ορίζεται, ονομάζονται **κρίσιμα σημεία**.

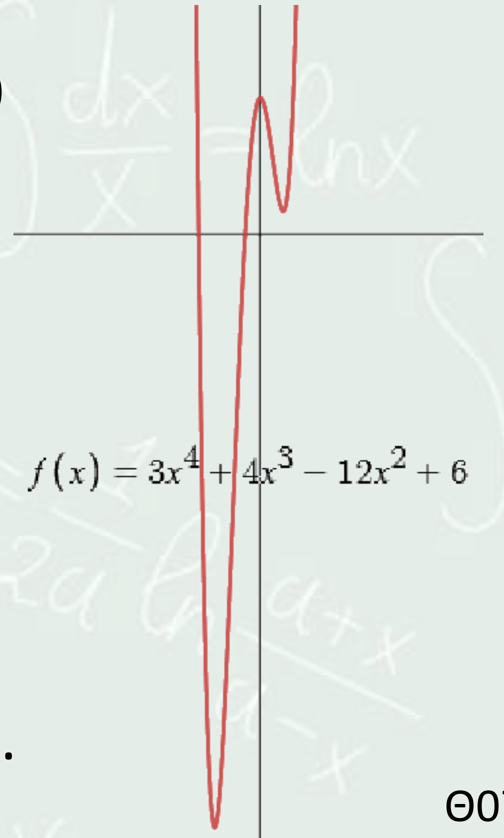
Εύρεση Ολικών Ακρότατων

Για την εύρεση των ολικών ακρότατων μιας συνάρτησης, βρίσκονται τα κρίσιμα σημεία και υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης για αυτά, καθώς επίσης και για τα άκρα του πεδίου ορισμού της.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 6$, η οποία ορίζεται στο $[-3,3]$.

Είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίου ορισμού της, και είναι:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x-1)(x+2)$$



Τα κρίσιμα σημεία είναι τα 0, 1, και -2. Επομένως:

$$f(-3) = 33$$

$$f(-2) = -26$$

$$f(0) = 6$$

$$f(1) = 1$$

$$f(3) = 249$$

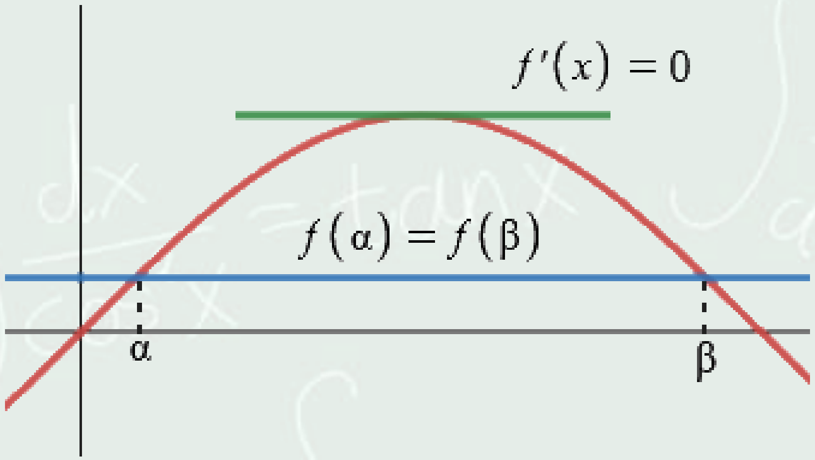
Συνεπώς, ολικό μέγιστο είναι το 249 και το ολικό ελάχιστο είναι το -26.

Θεώρημα του Rolle

Όταν μια συνάρτηση f ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$, είναι διαφορίσιμη στο (α, β), και τυγχάνει να $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο c, εσωτερικό του $[\alpha, \beta]$, για το οποίο ισχύει:

$$f'(c) = 0$$

Υπάρχει δηλαδή τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο, διαισθητικά, γίνεται αντιληπτό ότι είναι ακρότατο.

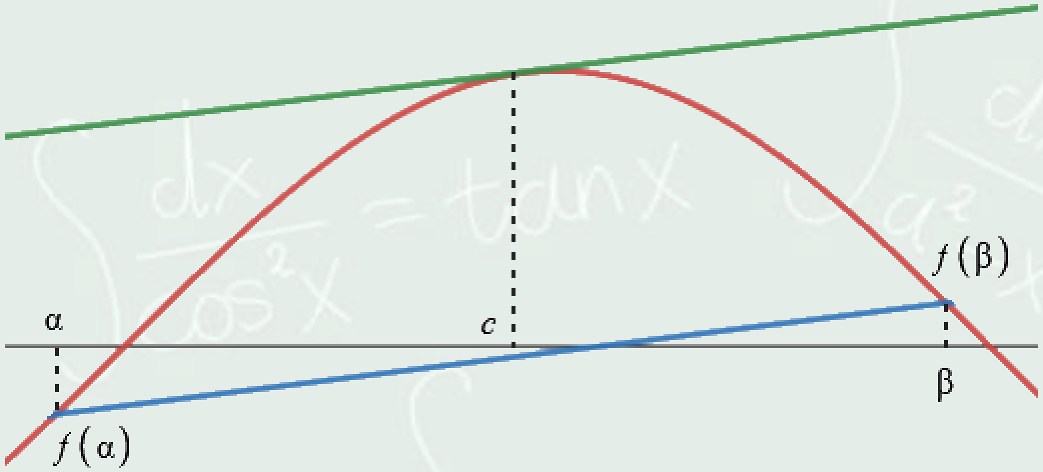


Θεώρημα Μέσης Τιμής

Όταν μια συνάρτηση f ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$ και είναι διαφορίσιμη στο (α, β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο c, εσωτερικό του $[\alpha, \beta]$, για το οποίο ισχύει:

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράτασης στο σημείο c είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα των σημείων $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$ και $B\big(\beta, f(\beta)\big)$.



Μονοτονία Συνάρτησης

Όταν σε μια συνάρτηση *f*, για κάθε x_1 και x_2 που ανήκουν στο υποσύνολο $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, με $x_1<x_2$, είναι:

- $f(x_1)<f(x_2)$, η συνάρτηση καλείται **αύξουσα**.
- $f(x_1)>f(x_2)$, η συνάρτηση καλείται **φθίνουσα**.

Σε αυτές τις περιπτώσεις η *f* καλείται **μονότονη** στο $[\alpha, \beta]$.

Αν η *f* είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), τότε αν:

- $f'(x) > 0$, σημαίνει ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της καμπύλης της γραφικής παράστασης έχει θετική κλίση, και άρα η τιμή της αυξάνει. Είναι αύξουσα.
- $f'(x) < 0$, σημαίνει ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της καμπύλης της γραφικής παράστασης έχει αρνητική κλίση, και άρα η τιμή της μειώνεται. Είναι φθίνουσα.

Εύρεση Μονοτονίας

Για την εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης:

- Εντοπίζονται τα κρίσιμα σημεία.
- Επειδή ανάμεσα σε αυτά το πρόσημο της f' δεν αλλάζει, σημαίνει ότι στο αντίστοιχο τμήμα του πεδίου ορισμού, η f είναι μονότονη.
- Υπολογίζεται μία τιμή της f' σε κάθε ένα από τα τμήματα μεταξύ των κρίσιμων σημείων, και έτσι βρίσκεται το πρόσημο της f' και το είδος μονοτονίας της f σε αυτά τα τμήματα.

Επίσης, εάν η μονοτονία της συνάρτησης:

- Αλλάζει από αύξουσα σε φθίνουσα, το κρίσιμο σημείο είναι τοπικό μέγιστο.
- Αλλάζει από φθίνουσα σε αύξουσα, το κρίσιμο σημείο είναι τοπικό ελάχιστο.
- Δεν αλλάζει, το κρίσιμο σημείο δεν είναι δεν είναι ακρότατο.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 42x^2 + 180x - 240$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και έχει:

$$f'(x) = 12x^3 - 84x^2 + 84x - 180$$

Η οποία παραγοντοποιείται ως $f'(x) = 12(x+1)(x-3)(x-5)$.

Συνεπώς, τα μόνα κρίσιμα σημεία της είναι τα -1, 3, και 5.

Υπολογίζονται τιμές της f' που βρίσκονται στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1,3)$, $(3,5)$, και $(5, +\infty)$. Δηλαδή:

$f'(-2) = -420$, είναι αρνητική, άρα η f φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

$f'(0) = 180$, είναι θετική, άρα η f αύξουσα σε αυτό το διάστημα.

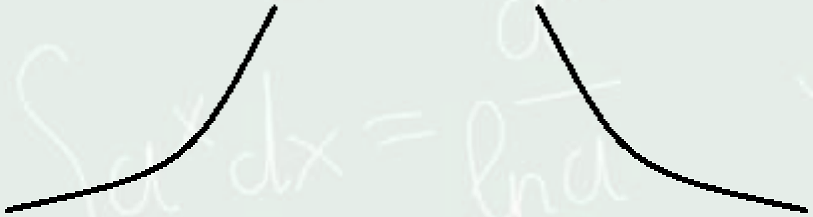
$f'(4) = -60$, είναι αρνητική, άρα η f φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

$f'(6) = 252$, είναι θετική, άρα η f αύξουσα σε αυτό το διάστημα.

Επιπλέον, προκύπτει ότι το -1 είναι ολικό ελάχιστο, το 3 τοπικό μέγιστο, και το 5 τοπικό ελάχιστο.

Κοιλότητα Γραφικής Παράστασης

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, σε ένα τμήμα της, λέγεται ότι έχει τα **κοίλα άνω**, όταν σε αυτό διάστημα η τιμή της f επιταχύνει την αύξησή της ή επιβραδύνει τη μείωσή της. Δηλαδή, έχει τη μορφή:



Ενώ, έχει τα **κοίλα κάτω**, όταν σε αυτό διάστημα η τιμή της f επιταχύνει την μείωσή της ή επιβραδύνει τη αύξησή της. Δηλαδή, έχει τη μορφή:

Εύρεση Κοιλότητας

Για να είναι τα κοίλα άνω σε τμήμα της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης θα πρέπει να αυξάνει ο ρυθμός μεταβολής της. Αυτό σημαίνει ότι η f' είναι αύξουσα και επομένως $f'' > 0$.

Αντίθετα, για να είναι τα κοίλα κάτω θα πρέπει ο ρυθμός να μειώνεται. Δηλαδή η f' να είναι φθίνουσα και επομένως $f'' < 0$.

Εκεί όπου αλλάζει το πρόσημο της f'', δηλαδή εκεί που μηδενίζεται, η γραφική παράσταση αλλάζει κοιλότητα. Τα σημεία μηδενισμού της f'' καλούνται **σημεία καμπής**.

Για παράδειγμα η $f(x) = x^3 + 1$, έχει $f'(x) = 3x^2$ και $f''(x) = 6x$.

Έχει $f''(x) = 0$ για $x = 0$, που είναι το σημείο καμπής.

Η f για $x < 0$ έχει τα κοίλα κάτω και για για $x > 0$ έχει τα κοίλα πάνω.