Μαθηματικά Ι

Αλυσιδωτή Παραγώγιση

Ιωάννης Τσιμπερίδης
itsimper@cs.duth.gr

Αλυσιδωτή Παραγώγιση

Αν η $f(u)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο u, για το οποίο ισχύει $u=g(x)$, και η $g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x, τότε και η σύνθετη συνάρτηση $(f∘g)(x)=f(g(x))$ είναι διαφορίσιμη στο x. Ισχύει:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Ή με διαφορετικούς συμβολισμούς:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

με $u=g(x)$.

Παραδείγματα

Έστω η συνάρτηση:

$$y_1 = f_1(x) = \sin(x^2)$$

Θέτοντας:

$$u = x^2$$

Προκύπτει:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_1}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du} \cdot \frac{d(x^2)}{dx} = \cos u \cdot 2x = 2x\cos(x^2)$$

Παρομοίως, για την:

$$y_2 = f_2(x) = \ln\frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{dy_2}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1/x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$$

Επέκταση Αλυσιδωτής Παραγώγισης

Αν η *f*(*u*) είναι διαφορίσιμη στο σημείο *u*, για το οποίο ισχύει *u*=*g*(*v*), και η *g*(*v*) είναι διαφορίσιμη στο *h*, για το οποίο ισχύει *v*=*h*(*x*), και η *h*(*x*) είναι διαφορίσιμη στο *x*, τότε και η σύνθετη συνάρτηση (*f*∘*g*∘*h*)(*x*)=*f*(*g*(*h*(*x*))) είναι διαφορίσιμη στο *x*. Ισχύει:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Για παράδειγμα, για την:

$$y = f(x) = \sin(\cos(2x^2))$$

θέτοντας $u = \cos(2x^2)$ και $v = 2x^2$ η παράγωγος είναι:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du} \cdot \frac{d(\cos v)}{dv} \cdot \frac{d(2x^2)}{dx} = \cos u \cdot (-\sin v) \cdot 4x$$
$$= -4x \cos(\cos(2x^2)) \sin(2x^2)$$

Φυσικά, μπορεί να γίνει και περαιτέρω επέκταση.