Ασκήσεις Παράγωγοι

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου:
   a. $f(x) = x^4$
   b. $f(x) = x^{3/2}$
   c. $f(x) = \frac{x}{3x-1}$
   d. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

2. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραγώγων:
   a. $f(x) = x^5 + 6x^4 - 2x + 4$
   b. $f(x) = x^{4/3} - 4x^{3/2}$
   c. $f(x) = \frac{x^2+1}{3x}$
   d. $f(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$

3. Να βρεθούν οι ακόλουθοι παράγωγοι:
   a. $(\cos x \sin x + \tan x)'$
   b. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(x^2 + 2)\right)'$
   c. $(x^3 \cos x \sin x)'$
   d. $(x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\cos x)'$
   e.

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΠΘ

Λύσεις

1.

a. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4+-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^4)=4x^3$

b. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^3}-\sqrt{x^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h\left(\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h\left(\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh+h^2}{\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

c. $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{3(x+h)-1}-\frac{x}{3x-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(3x-1)(x+h)-x(3(x+h)-1)}{(3(x+h)-1)(3x-1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh-x-h-x(3x+3h-1)}{h(3(x+h)-1)(3x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(3(x+h)-1)(3x-1)}=-\frac{1}{(3x-1)^2}$

d. $\lim_{h\to 0}\frac{x+h-\frac{1}{x+h}-x-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+\frac{h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{x(x+h)}\right)=1+\frac{1}{x^2}$

2.

a. $f'(x)=5x^4+24x^3-2.$

b. $f(x)=\frac{4}{3}x^{2/3}-6x^{1/2}$.

c. $f'(x)=\left(\frac{x^2}{3x}+\frac{1}{3x}\right)'=\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3x}\right)'=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$

d. $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-3\frac{1}{x^4}$

3.

a. $(\cos x\sin x)'+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=((\cos x)'\sin x+(\sin x)'\cos x)\frac{\cos x(\sin x)'-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=(\cos^2 x-\sin^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}=1-\tan^2 x.$

b. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(x^2+2)\right)'=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{x}}\left((x^2+2)\right)'=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\ (x^2+2)+\frac{2x}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$

c. $(x^3\cos x\sin x)'=(x^3)'\cos x\sin x+x^3(\cos x\sin x)'=2x^2\cos x\sin x+x^3(\cos^2 x-\sin^2 x).$

d. $(x^2\cos x+2x\sin x-2\cos x)'=(x^2\cos x)'+(2x\sin x)'-(2\cos x)'=(x^2)'\cos x+x^2(\cos x)'+(2x)'\sin x+2x(\sin x)'-2(\cos x)'=4x\cos x-x^2\sin x+4\sin x.$

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΠΘ