

Μαθηματικά I

Συνέχεια

Ιωάννης Τσιμπερίδης
itsimper@cs.duth.gr

Συνέχεια σε Σημείο

Μια συνάρτηση είναι **συνεχής σε ένα σημείο** c , όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

- Υπάρχει το $f(c)$.
- Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$.
- Ισχύει $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$.

Στη γραφική παράσταση η συνέχεια σε σημείο αποτυπώνεται με το να μην «κόβεται» η γραμμή της παράστασης σε εκείνο το σημείο (να είναι συνεχής).

Για παράδειγμα, για την $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, στο $x=1$, υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

αλλά δεν ορίζεται, με συνέπεια να μην είναι συνεχής σε αυτό το σημείο.

Πλευρική Συνέχεια

Όταν σε ένα σημείο c ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

λέγεται ότι η $f(x)$ είναι **συνεχής από δεξιά** στο c .

Επίσης, εάν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

λέγεται ότι η $f(x)$ είναι **συνεχής από αριστερά** στο c .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

στο 0 είναι συνεχής από δεξιά, αλλά όχι από αριστερά.

Συνεχής Συνάρτηση

Μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της καλείται **συνεχής συνάρτηση**.

Όταν το πεδίο ορισμού είναι κλειστό, τότε στο ακραίο σημείο αρκεί η πλευρική συνέχεια για να χαρακτηριστεί η συνάρτηση ως συνεχής.

Για παράδειγμα, η:

$$f(x) = \sqrt{x - 4}$$

ορίζεται στο $[4, +\infty)$.

Στο ακραίο σημείο, στο 4, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) = 0$$

Άρα στο 4, όπως και σε κάθε άλλο σημείο, η $f(x)$ είναι συνεχής, και άρα είναι συνεχής συνάρτηση.

Ιδιότητες Συνέχειας

Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο c , τότε επίσης είναι συνεχείς στο c και οι:

- $f(x) + g(x)$.
- $f(x) - g(x)$.
- $f(x) \cdot g(x)$.
- $\frac{f(x)}{g(x)}$, εάν $g(c) \neq 0$.
- $k \cdot f(x)$, με k πραγματικό αριθμό.
- $(f(x))^n$, με n θετικό ακέραιο.
- $\sqrt[n]{f(x)}$, με n θετικό ακέραιο και να ορίζεται η παράσταση για το διάστημα που περιέχει το c .

Τύποι Ασυνέχειας

Μία συνάρτηση είναι ασυνεχής στις περιπτώσεις όπου το σημείο μελέτης:

- Δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της. Δεν υπάρχει το $f(c)$ και πιθανόν το $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ να είναι άπειρο.
- Είναι σε ένα από τα άκρα του ορισμού μιας τμηματικής συνάρτησης και τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα μεταξύ τους.
- Ορίζεται διαφορετικά από την υπόλοιπη συνάρτηση και δεν έχει ίδια τιμή με τα πλευρικά όρια.

Όταν μία συνάρτηση f είναι ασυνεχής μόνο σε ένα σημείο, επειδή δεν ορίζεται, αλλά υπάρχει το όριο της σε αυτό το σημείο, τότε μπορεί να οριστεί μια άλλη συνάρτηση g , η οποία προκύπτει από την f με επέκταση του πεδίου ορισμού στο σημείο που δεν οριζόταν η f . Η g ονομάζεται **συνεχής επέκταση** της f .

Για παράδειγμα, από την $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, που δεν είναι συνεχής στο 1, προκύπτει η συνεχής επέκταση g εάν οριστεί $g(1) = 2$.