Ασκήσεις Ασύμπτωτων

1. Να βρεθούν εάν υπάρχουν, και ποιες είναι, οι οριζόντιες, κατακόρυφες, και πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων:
   a. $f_1(x) = \ln(x^2 - 4)$. Εκτός από πλάγιες
   b. $f_2(x) = \frac{x^3+2x-3}{x^2-1}$.
   c. $f_3(x) = \frac{e^x+e}{e^x-e}$.
   d. $f_4(x) = \sqrt{4x^2 - 1} - 3x$.
   e. $f_5(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$.

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΠΘ

Λύσεις

1.

a. Έχει πεδίο ορισμού $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. Επομένως τα σημεία που ελέγχονται για κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι τα -2 και 2.

$$\lim_{x\to -2^-} \ln(x^2-4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \ln(x^2-4) = -\infty$$

Υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες στα -2 και 2.

Για τις οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x^2-4) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \ln(x^2-4) = +\infty$$

b. Δεν ορίζεται στα -1 και 1. Σε αυτά αναζητούνται οι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-1+2x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)+2(x-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+x+3}{x+1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+3}{x+1} = \frac{5}{2}$$

Υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο -1.

Για τις οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x-3}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+2x-3}{x^2-1} = -\infty$$

Για τις πλάγιες ασύμπτωτες, με διαίρεση πολυωνύμων προκύπτει η ασύμπτωτη $y = x$.

c. Δεν ορίζεται για *x*=1. Σε αυτό το σημείο αναζητείται κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x+e}{e^x-e} = \pm\infty$$

Υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 1.

Για τις οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x+e}{e^x-e} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-e+2e}{e^x-e} = \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2e}{e^x-e}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x+e}{e^x-e} = \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{2e}{e^x-e}\right) = 1-2 = -1$$

Επομένως δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

d. Έχει πεδίο ορισμού $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες, διότι τα διαστήματα είναι κλειστά.

Για οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-3\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-3\right)=+\infty$$

Για πλάγιες ασύμπτωτες:

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}-3x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-3\right)}{x}=-1$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-3x+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=0$$

Άρα η $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο +∞.

$$\alpha=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}-3x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-3\right)}{x}=-5$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-3x+5x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2-1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}-2x}=0$$

Άρα η $y=-5x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο -∞.

e. Δεν ορίζεται στο 0.

Επομένως για κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-x^2-1}{x^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=-\infty$$

Άρα υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Για οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=0$$