

Ασκήσεις Ορίων

1. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$.

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$.

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}{x}$.

e. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$.

f. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$.

2. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + x + \sin x}{3 \cos x}$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + f(x)g(x) - 2g(x)}{(f(x) + 7)^{2/3} + \sqrt{g(x)}}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 4$.

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - \sqrt{g(x)h(x)} + 4 + \sqrt[3]{f(x)h(x)}}{xf(x) - x^2g(x) + x^3h(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$, και $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 8$.

3. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα πλευρικά όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow -5^-} (x + 7) \frac{|x + 5|}{x + 5}$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} \cos x$.

c. $\lim_{x \rightarrow (\pi/3)^+} \frac{1}{2} \frac{2 \cos x - 1}{|2 \cos x - 1|}$.

4. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{32x^3 - 16x^2 + 8x - 4}{2x^3 + 4x^2 + 8x + 16}}$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{x - 1}$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{3x^2 + 5x^{4/3}} - 1}{9 - 2x^{2/3} + (2x)^{1/2} + \sqrt[3]{x^4 + 2}}$.

Λύσεις

1.

a. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(x-2)}{x+5} = -7$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = 4$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x+1+x-1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2-1} = -1$

e. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^4-16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{3}{8}$

f. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)} = -\frac{3}{2}$

2.

a. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1+x+\sin x}{3 \cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pi/4} (1+x+\sin x)}{\lim_{x \rightarrow \pi/4} (3 \cos x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pi/4} 1 + \lim_{x \rightarrow \pi/4} x + \lim_{x \rightarrow \pi/4} \sin x}{3 \lim_{x \rightarrow \pi/4} \cos x} = \frac{1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{3 \frac{\sqrt{2}}{2}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)+f(x)g(x)-2g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}+\sqrt{g(x)}} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + 7)^{2/3} + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)}} = \frac{2+4-8}{(1+7)^{2/3} + \sqrt{4}} = -\frac{1}{3}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - \sqrt{g(x)h(x)+4} + \sqrt[3]{f(x)h(x)}}{xf(x) - x^2g(x) + x^3h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \lim_{x \rightarrow 1} g(x) - \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \lim_{x \rightarrow 1} h(x) + 4} + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \lim_{x \rightarrow 1} h(x)}}{\lim_{x \rightarrow 1} x \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} x^3 \lim_{x \rightarrow 1} h(x)} = \frac{32-6+4}{8-4+8} = \frac{5}{2}$

3.

a. $\lim_{x \rightarrow -5^-} (x+7) \frac{|x+5|}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5^-} (x+7) \frac{-x-5}{x+5} = -2$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{\sin x} \cos x = -1$

c. $\lim_{x \rightarrow (\pi/3)^+} \frac{\frac{1}{2} \frac{2 \cos x - 1}{|2 \cos x - 1|}}{\frac{1}{2} \frac{2 \cos x - 1}{1 - 2 \cos x}} = \lim_{x \rightarrow (\pi/3)^+} \frac{1}{2} \frac{2 \cos x - 1}{1 - 2 \cos x} = -\frac{1}{2}$

4.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{32x^3 - 16x^2 + 8x - 4}{2x^3 + 4x^2 + 8x + 16}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{32x^3}{2x^3}} = 4$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+8}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = -1$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{3x^2 + 5x^{4/3}} - 1}{9 - 2x^{2/3} + (2x)^{1/2} + \sqrt[3]{x^4 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^{4/3}}{\sqrt[3]{x^4 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^{4/3}}{x^{4/3}} = 5.$$