Μαθηματικά Ι

Όρια

Ιωάννης Τσιμπερίδης
itsimper@cs.duth.gr

Ορισμός Ορίου

Σε μια συνάρτηση $f(x)$, της οποίας η τιμή πλησιάζει σε μια τιμή L, όσο το x πλησιάζει στο c, χωρίς να παίρνει την τιμή c, λέγεται ότι έχει **όριο το L όταν το x τείνει στο c**, και συμβολίζεται ως:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Ένας πιο αυστηρός ορισμός είναι ο εξής:

Αν η $f(x)$ ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα, που περιέχει το c, χωρίς απαραίτητα να ορίζεται και στο c, και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα $\delta>0$, τέτοια ώστε:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{όταν} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

τότε η $f(x)$ έχει όριο το L όταν το x τείνει στο c.

Παραδείγματα

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 5$, όταν το *x* τείνει στο 0, οι τιμές που παίρνει είναι οι:

x	1	0,5	0,1	0,01	0,001
***f*(*x*)**	-1	-3,25	-4,69	-4,9699	-4,99699
x	-1	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001
***f*(*x*)**	-7	-6,25	-5,29	-5,0299	-5,00299

Όπως φαίνεται:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -5$$

Παρομοίως, για τη συνάρτηση $\mathrm{g}(x) = \frac{x^2+4x+3}{x+3}$, όταν το *x* τείνει στο -3:

x	-4	-3,5	-3,1	-3,01	-3,001
***g*(*x*)**	-3	-2,5	-2,1	-2,01	-2,001
x	-2	-2,5	-2,9	-2,99	-2,999
***g*(*x*)**	-1	-1,5	-1,9	-1,99	-1,999

Ιδιότητες Ορίων

Εάν ισχύει:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M$$

με L, M, c, και k να είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M$$

$$\lim_{x \to c}\big(k \cdot f(x)\big) = k \cdot L$$

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = L \cdot M$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \qquad M \neq 0$$

$$\lim_{x \to c} |f(x)| = |L|$$

$$\lim_{x \to c}\big(f(x)\big)^n = L^n \qquad n \text{ θετικός ακέραιος}$$

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n} \qquad n \text{ θετικός ακέραιος}$$

Όρια Πολυωνυμικών και Ρητών

Σε μια πολυωνυμική, μη τμηματική, συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε ένα πεδίο A, το όριο της στο σημείο c, που ανήκει στο A, είναι το:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$$
$$= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = f(c)$$

Αντίστοιχα, για τις ρητές συναρτήσεις:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$
$$= \frac{a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0}{b_m c^m + b_{m-1}c^{m-1} + \cdots + b_1 c + b_0} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

Εφόσον $g(c) \neq 0$.

Υπολογισμός Ορίων (Ι)

Ο υπολογισμός ορίου μιας συνάρτησης σε σημεία που δεν ορίζεται αποτελεί πρόκληση. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, σε ρητές συναρτήσεις και στα σημεία όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Σε κάποιες περιπτώσεις η λύση βρίσκεται με απαλοιφή όρων αριθμητή και παρονομαστή. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+4x-5}{x^3-x}$, ο υπολογισμός του ορίου στο 1, όπου η συνάρτηση δεν ορίζεται, έχει ως εξής:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^3-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+5)}{x\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+5)}{x(x+1)}$$

Σε αυτό το σημείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο υπολογισμός ορίων ρητών συναρτήσεων, διότι ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται. Άρα:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^3-x} = 3$$

Υπολογισμός Ορίων (ΙΙ)

Σε συναρτήσεις όπου παρουσιάζονται ριζικά σε αριθμητή ή παρονομαστή, όπως για παράδειγμα στην $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$, το όριο τους σε σημεία που δεν ορίζονται βρίσκεται με τον πολλαπλασιασμό της συζυγούς ποσότητας, σε αριθμητή και παρονομαστή.

Δηλαδή:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+5-9}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{1}{6}$$

Πλευρικά Όρια

Όταν ισχύει:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

σημαίνει ότι όσο οι τιμές του *x* πλησιάζουν στο *c*, τόσο η *f*(*x*) πλησιάζει στο *L*. Αυτό ισχύει και για τις μεγαλύτερες και για τις μικρότερες από το *c* τιμές του *x*.

Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις αυτό δεν συμβαίνει, και όταν το *x* <u>τείνει από τα δεξιά</u> στο σημείο (μεγαλύτερες τιμές από το *c*) η *f*(*x*) συγκλίνει σε διαφορετική τιμή από ότι όταν το *x* <u>τείνει από τα αριστερά</u> (μικρότερες τιμές από το *c*).

Αυτές οι τιμές ονομάζονται **πλευρικά όρια**, και συμβολίζονται:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Για να υπάρχει το όριο σε ένα σημείο της συνάρτησης, που δεν είναι ακραίο στο πεδίο ορισμού της, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Παράδειγμα Πλευρικών Ορίων

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{για } x < 1 \\ \dfrac{x^2+7x-18}{x^2+2x-8} & \text{για } 1 \leq x < 2 \\ x^2+6 & \text{για } x \geq 2 \end{cases}$$

Το όριο της συνάρτησης στο 1 είναι:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-}(x+1) = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+7x-18}{x^2+2x-8} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+9}{x+4} = 2$$

Το όριο της συνάρτησης στο 2 είναι:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+7x-18}{x^2+2x-8} = \frac{11}{6} \qquad \lim_{x \to 2^+}(x^2+6) = 10$$

Όρια στο x→±∞

Όριο μπορεί να οριστεί ακόμα και στις περιπτώσεις όπου το ***x* τείνει στο +∞ ή στο -∞**. Όταν υπάρχει αυτό το όριο, συμβολίζεται:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

και σημαίνει ότι όσο το *x* παίρνει μεγαλύτερες τιμές (ή μικρότερες), τόσο η τιμή της *f*(*x*) πλησιάζει στην τιμή *L*.

Η επέκταση του ορισμού ύπαρξης του ορίου είναι ότι για κάθε *ε*>0 υπάρχει Μ για τα οποία ισχύει:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{όταν} \quad x > M \ (\text{ή } x < M)$$

Για παράδειγμα, στη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$, όταν το *x* τείνει στο +∞ η τιμή της *f*(*x*) πλησιάζει στο 0. Το ίδιο συμβαίνει και όταν το *x* τείνει στο -∞. Δηλαδή:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Αντίθετα, η συνάρτηση $g(x) = \sin x$ δεν έχει όριο στο +∞ και στο -∞, διότι δεν επαληθεύεται ο ορισμός ύπαρξης ορίου στο +∞ (ή στο -∞).

Όρια Ρητών Συναρτήσεων στο x→±∞

Για τον υπολογισμό του ορίου ρητών συναρτήσεων όταν το *x* τείνει στο +∞ ή στο -∞, διαιρείται αριθμητής και παρονομαστής με τη μεγαλύτερη δύναμη του *x*, και στη συνέχεια εφαρμόζονται οι ιδιότητες ορίων.

Για παράδειγμα, το όριο της $f(x)=\frac{x^3-4x+5}{3x^3-6x^2-4x+5}$ στο +∞ υπολογίζεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x+5}{3x^3-6x^2-9x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4\frac{1}{x^2}+5\frac{1}{x^3}}{3-6\frac{1}{x}-9\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{6}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}$$

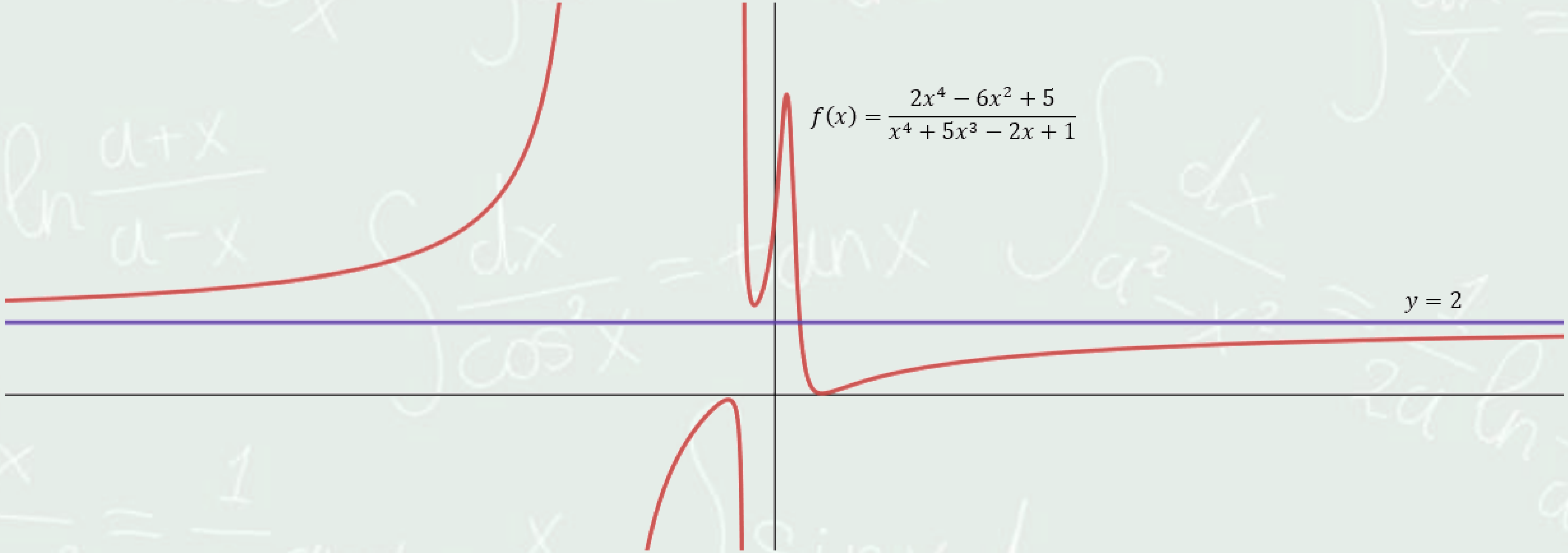
$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}3+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{6}{x}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{9}{x^2}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{1+0+0}{3+0+0+0}=\frac{1}{3}$$

Οριζόντιες Ασύμπτωτες

Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης *f* όταν το *x* τείνει στο +∞ (ή στο -∞), σημαίνει ότι η *f*(*x*) παίρνει τιμές ολοένα και πιο κοντά στο όριο όσο το *x* μεγαλώνει (ή μικραίνει).

Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης θα παρουσιάζει τη μορφή της προσέγγισης μιας τιμής προς τα δεξιά του άξονα *x* (ή προς τα αριστερά).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^4-6x^2+5}{x^4+5x^3-2x+1}$ έχει γραφική παράσταση:



που προσεγγίζει την *y*=2, η οποία ονομάζεται **οριζόντια ασύμπτωτη**.

Τιμή Ορίου στο ±∞

Σε κάποιες περιπτώσεις η *f*(*x*) παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες (ή μικρότερες) τιμές, όταν το *x* τείνει σε μία τιμή *c*. Σε αυτές τις περιπτώσεις λέγεται ότι το όριο της συνάρτησης στο *c* είναι +∞ (ή -∞), και συμβολίζεται:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

Η επέκταση του ορισμού ύπαρξης του ορίου, ώστε να παίρνει τις τιμές ±∞, είναι ότι για κάθε *B*>0 υπάρχει ένα *δ*>0, τέτοια ώστε:

$$f(x) > B \ (\text{ή } f(x) < B) \quad \text{όταν} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

Για παράδειγμα, στη συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x^2}$, όταν το *x* τείνει στο 0 η τιμή της *f*(*x*) γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη. Δηλαδή:

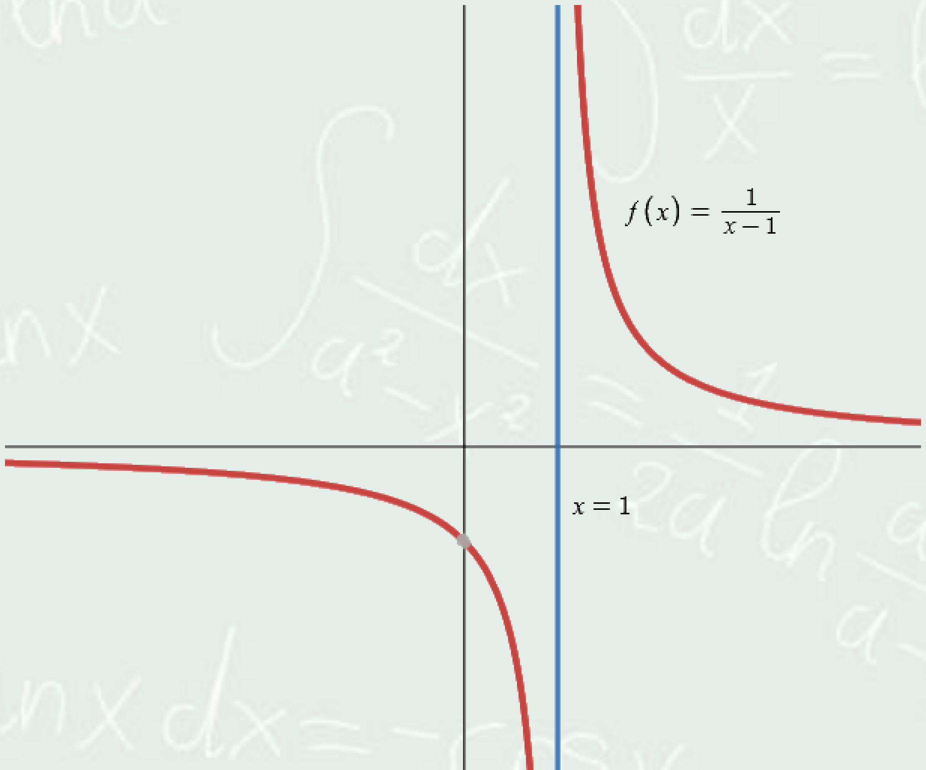
$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^2} = +\infty$$

Κατακόρυφες Ασύμπτωτες

Αν το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο *c* είναι το $\pm\infty$, σημαίνει ότι η συνάρτηση παίρνει πολύ μεγάλες (ή πολύ μικρές) τιμές κοντά στο σημείο *x*=*c*, και άρα η γραφική της παράσταση έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη**.

Παρομοίως, εάν τα πλευρικά όρια της *f*(*x*), στο *c*, είναι $\pm\infty$, τότε η γραφική παράσταση παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτη από τη μία πλευρά της ευθείας *x*=*c*.

Π.χ. η $f(x) = \frac{1}{x-1}$ έχει γραφική παράσταση:

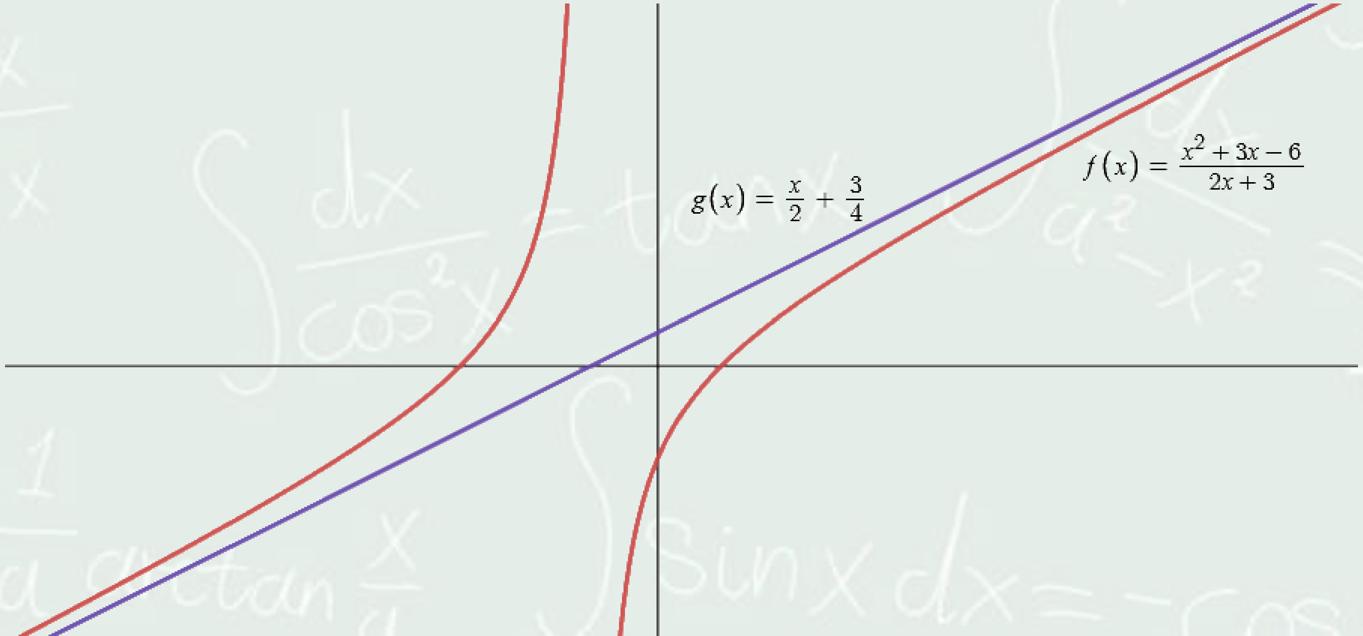


Πλάγιες Ασύμπτωτες

Για τις ρητές συναρτήσεις των οποίων η μεγαλύτερη δύναμη του αριθμητή είναι κατά ένα μεγαλύτερη από τη μεγαλύτερη δύναμη του παρονομαστή, ισχύουν τα εξής:

- Έχουν όριο το +∞ (ή -∞) όταν το *x* τείνει στο +∞, και όριο -∞ (ή +∞) όταν το *x* τείνει στο -∞.
- Η γραφική παράσταση παρουσιάζει μία **πλάγια ασύμπτωτη**.

Για παράδειγμα η $f(x) = \frac{x^2+3x-6}{2x+3}$, έχει γραφική παράσταση:



Εύρεση Πλάγιας Ασύμπτωτης (I)

Για την εύρεση της πλάγιας ασύμπτωτης μιας ρητής συνάρτησης, εκτελείται **διαίρεση πολυωνύμων**, κατά την οποία ακολουθείται η τεχνική της διαίρεσης αριθμών, με τη μόνη διαφορά ότι στην εύρεση του πηλίκου λαμβάνονται υπόψη μόνο οι μεγαλύτερες δυνάμεις του διαιρέτη και του διαιρετέου.

Για παράδειγμα, στη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3+5x-9}{3x^2-x+4}$:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + 5x - 9 & 3x^2 - x + 4 \\ \hline
-2x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x & \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \\ \cline{1-1}
\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x - 9 & \\
-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{9} & \\ \cline{1-1}
-\frac{19}{9}x - \frac{89}{9} &
\end{array}
$$

πλάγια ασύμπτωτη

Εύρεση Πλάγιας Ασύμπτωτης (ΙΙ)

Εκτός από τις ρητές συναρτήσεις, πλάγιες ασύμπτωτες μπορούν να έχουν και υπερβατικές συναρτήσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις η διαίρεση πολυωνύμων δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η ασύμπτωτη.

Στη γενική περίπτωση, η πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης $f(x)$, είναι μια ευθεία της μορφής $\alpha x+\beta$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\quad \text{και}\quad \beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x)$$

Για να υπάρχει η ασύμπτωτη της $f(x)$ στο $+\infty$ θα πρέπει το α είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός, και το β πραγματικός αριθμός.

Παρομοίως αναζητείται η πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)$ στο $-\infty$.

Σημείωση: Όταν μια συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (ή $-\infty$), τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (ή $-\infty$), και το αντίθετο.