

# Μαθηματικά I

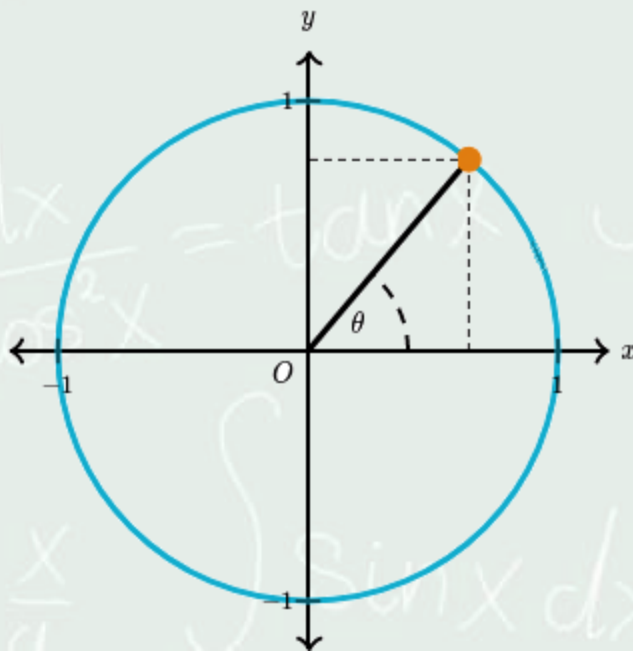
## Υπερβατικές Συναρτήσεις

Ιωάννης Τσιμπερίδης  
itsimper@cs.duth.gr

# Τριγωνομετρικές (I)

**Μοναδιαίος κύκλος** ονομάζεται ένας κύκλος το κέντρο του οποίου είναι στην αρχή των αξόνων του Καρτεσιανού επιπέδου και έχει ακτίνα 1.

Κάθε σημείο αυτού του κύκλου ορίζει μια γωνία η οποία σχηματίζεται από την ακτίνα του κύκλου σε εκείνο το σημείο και τον άξονα  $x$ . Επίσης, η ακτίνα από αυτό το σημείο έχει μία προβολή στον άξονα των  $x$  και μία προβολή στο άξονα  $y$ . Οι προβολές αυτές, οι οποίες μπορούν να πάρουν τιμή μεταξύ του  $-1$  και του  $1$ , ορίζουν τις τιμές για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις της αντίστοιχης γωνίας.



# Τριγωνομετρικές (II)

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι οι:

- **Ημίτονο (sine, sin)**. Είναι η προβολή της ακτίνας του σημείου στον άξονα  $y$ .
- **Συνημίτονο (cosine, cos)**. Είναι η προβολή της ακτίνας του σημείου στον άξονα  $x$ .
- **Εφαπτομένη (tangent, tan)**. Είναι  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .
- **Συνεφαπτομένη (cotangent, cot)**. Είναι  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .
- **Τέμνουσα (secant, sec)**. Είναι  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ .
- **Συντέμνουσα (cosecant, csc)**. Είναι  $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ .

# Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Για κάθε  $x, x_1, x_2$ , ισχύουν τα εξής:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

# Παραδείγματα

Ως γνωστό  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ .

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi = \sin x \cdot 1 + \cos x \cdot 0 = \sin x$$

Επίσης, η ταυτότητα  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$  αποδεικνύεται ότι ισχύει, ως εξής:

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

Ακόμα, για δοσμένο ημίτονο μιας άγνωστης γωνίας μπορεί να υπολογιστεί το συνημίτονό της, ως εξής:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Αντίστοιχα, μπορεί να υπολογιστεί το ημίτονο της γωνίας, δοσμένου συνημίτονου.

# Εκθετικές

**Εκθετικές συναρτήσεις** καλούνται αυτές στις οποίες η ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκεται στον εκθέτη κάποιας ποσότητας. Για παράδειγμα:

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = 10^{2x+1}$$

$$y_3 = 2^{\sqrt{x}}$$

Στη διαχείριση αυτών των συναρτήσεων μπορούν να αξιοποιηθούν οι ιδιότητες δυνάμεων:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{1/x} = \sqrt[x]{a}$$

# Λογαριθμικές

**Λογαριθμικές συναρτήσεις** καλούνται αυτές στις οποίες η ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκεται εντός λογαρίθμου. Για παράδειγμα:

$$y_1 = \ln x$$

$$y_2 = \log_2(x + 1)$$

$$y_3 = 5 \log(2x)$$

Στη διαχείριση αυτών των συναρτήσεων μπορούν να αξιοποιηθούν οι ιδιότητες λογαρίθμων:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$\log_a x^k = k \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x$$

# Παράδειγμα

Να απλοποιηθεί η ακόλουθη έκφραση ώστε ο μόνος λογάριθμος που θα εμφανίζεται να είναι το  $\ln 2$ .

$$\ln(x + 1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 1) + \ln 8 =$$

$$\ln(x + 1) - \frac{1}{2} \ln(x + 1)^2 + \ln 2^3 =$$

$$\ln(x + 1) - 2 \frac{1}{2} \ln(x + 1) + 3 \ln 2 =$$

$$3 \ln 2$$



# Υπερβολικές

Οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι οι ακόλουθες:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$