Μαθηματικά Ι

Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής

Ιωάννης Τσιμπερίδης
itsimper@cs.duth.gr

Θ01.01

Ορισμός

Συνάρτηση μιας μεταβλητής καλείται ο κανόνας με τον οποίο αντιστοιχίζεται κάθε τιμή αυτής της μεταβλητής, σε μια άλλη τιμή.

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται είναι:

$$y = f(x)$$

Όπου *x* είναι η εν λόγω μεταβλητή, η οποία καλείται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, διότι οι τιμές της δεν εξαρτώνται από κάτι άλλο.

Όπου *y* είναι η μεταβλητή στην οποία αντιστοιχίζονται οι τιμές της *x*, ύστερα από την επιβολή του «κανόνα». Αυτή η μεταβλητή καλείται **εξαρτημένη μεταβλητή**, διότι οι τιμές της εξαρτώνται από την *x*.

Κάποια παραδείγματα συναρτήσεων:

$$y_1 = x^2 + 1 \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{x} - 5} \qquad y_3 = \sin^2 x$$

Πεδία Ορισμού και Τιμών

Πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης καλείται το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Πεδίο τιμών μιας συνάρτησης καλείται το σύνολο των τιμών που παίρνει η εξαρτημένη μεταβλητή, μετά την επιβολή του «κανόνα» στο πεδίο ορισμού.

Όταν δεν ορίζεται ρητά το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, τότε ως πεδίου ορισμού λαμβάνονται όλες οι επιτρεπτές πραγματικές τιμές. Σε αυτή την περίπτωση καλείται **φυσικό πεδίο ορισμού**.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στους παραπάνω ορισμούς, τόσο το πεδίο ορισμού, όσο και το πεδίο τιμών, είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Οι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει αυτό καλούνται **πραγματικές συναρτήσεις**.

Παραδείγματα

Ορισμένα παραδείγματα συναρτήσεων με τα φυσικά πεδία ορισμού τους και τα πεδία τιμών τους είναι τα:

Συνάρτηση	**Πεδίο Ορισμού**	**Πεδίο Τιμών**
$y = x^2 + 4$	$\mathbb{R}$	$[4, +\infty)$
$y = \dfrac{x+2}{x-1}$	$\mathbb{R} - \{1\}$	$\mathbb{R} - \{1\}$
$y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$	$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$	$(0, +\infty)$
$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$y = \dfrac{1}{\sin x}$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Μονοτονία Συνάρτησης

Μια συνάρτηση καλείται:

- **Γνησίως αύξουσα** όταν για κάθε x_1 και x_2, για τα οποία ισχύει $x_1<x_2$, ισχύει και $f(x_1)<f(x_2)$.
- **Γνησίως φθίνουσα** όταν για κάθε x_1 και x_2, για τα οποία ισχύει $x_1<x_2$, ισχύει και $f(x_1)>f(x_2)$.
- **Αύξουσα** όταν για κάθε x_1 και x_2, για τα οποία ισχύει $x_1<x_2$, ισχύει και $f(x_1)\leq f(x_2)$.
- **Φθίνουσα** όταν για κάθε x_1 και x_2, για τα οποία ισχύει $x_1<x_2$, ισχύει και $f(x_1)\geq f(x_2)$.

Μια συνάρτηση μπορεί να είναι κατά τμήματα του πεδίου ορισμού της αύξουσα, φθίνουσα, γνησίως αύξουσα, ή γνησίως φθίνουσα.

Για παράδειγμα, η $y_1 = x^3 + 1$ είναι γνησίως αύξουσα, σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Ενώ η $y_2 = -x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Συμμετρία Συνάρτησης

Μια συνάρτηση καλείται:

- **Άρτια** όταν για κάθε *x* ισχύει *f*(-*x*)=*f*(*x*).
- **Περιττή** όταν για *x* ισχύει *f*(-*x*)=-*f*(*x*).

Για παράδειγμα, οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι άρτιες:

$$y_1 = x^2 \qquad y_2 = \cos x \qquad y_3 = 1$$

Ενώ οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι περιττές:

$$y_4 = x^3 + 2x \qquad y_5 = \sin x \qquad y_6 = -x$$

Η πρόσθεση-αφαίρεση δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

Η πρόσθεση-αφαίρεση δύο περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση.

Το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

Το γινόμενο μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.

Περιοδική Συνάρτηση

Μια συνάρτηση καλείται **περιοδική** όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός *T* για τον οποίο ισχύει ότι για κάθε *x* είναι:

$$f(x+T) = f(x)$$

Το *T* ονομάζεται **περίοδος** της συνάρτησης.

Παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων είναι οι:

$$\tan x \qquad 2\cos(2x)+1 \qquad \sin^2 x$$

Χάριν γενικότητας, όλες οι συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν περιοδικές, επεκτείνοντας τον ορισμό και θεωρώντας ότι το *T* μπορεί να πάρει και την τιμή ∞.

Έτσι κάποιες συναρτήσεις έχουν περίοδο ίση με άπειρο.

Κατηγορίες Συναρτήσεων (Ι)

Μια ομαδοποίηση των συναρτήσεων είναι η εξής:

- Συναρτήσεις δυνάμεων. Όπως οι:

$$y_1 = x \qquad y_2 = 3x^2 \qquad y_3 = 1$$

- Συναρτήσεις αρνητικών δυνάμεων. Όπως οι:

$$y_4 = \frac{1}{x} \qquad y_5 = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad y_6 = \frac{1}{x^5}$$

- Συναρτήσεις ρίζας. Όπως οι:

$$y_7 = \sqrt{x+1} \qquad y_8 = \sqrt[3]{x} \qquad y_9 = \sqrt[4]{x^3}$$

- Πολυωνυμικές συναρτήσεις. Όπως οι:

$$y_{10} = x^2 + x + 1 \qquad y_{11} = x^5 + 3x^3 + 2x + 5 \qquad y_{12} = 2x^7 + 4x^2$$

- Ρητές συναρτήσεις. Όπως οι:

$$y_{13} = \frac{3x}{5x^2+1} \qquad y_{14} = \frac{2x^3 + 9x^2 + 5x + 8}{5x^4 + 6x^2 + 2} \qquad y_{15} = \frac{4x^6 + 3x^3 + 2}{5x^3 + x}$$

Κατηγορίες Συναρτήσεων (ΙΙ)

Οι συναρτήσεις που δεν ανήκουν σε μία από τις προηγούμενες κατηγορίες, οι οποίες καλούνται **αλγεβρικές συναρτήσεις**, ονομάζονται **υπερβατικές συναρτήσεις**.

Παραδείγματα υπερβατικών συναρτήσεων είναι οι:

- Τριγωνομετρικές. Όπως οι:

$$y_1 = \tan x \qquad y_2 = \cos(2x) \qquad y_3 = 3\sin^2 x$$

- Εκθετικές. Όπως οι:

$$y_4 = e^x \qquad y_5 = 2^{x+1} \qquad y_6 = 5^{2x}$$

- Λογαριθμικές. Όπως οι:

$$y_7 = \ln x \qquad y_8 = \log_2 x \qquad y_9 = \log(x+1)$$

- Υπερβολικές. Όπως οι:

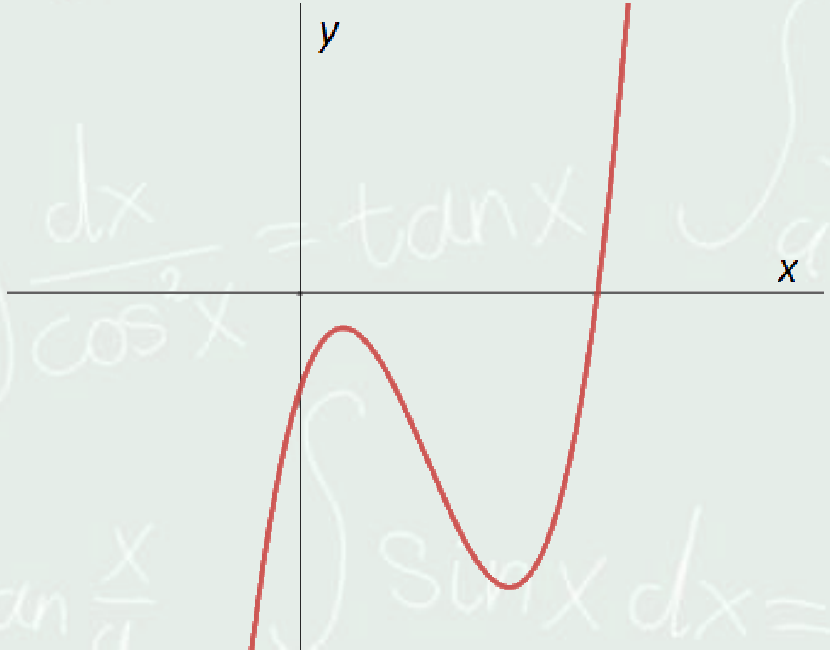
$$y_{10} = \sinh x \qquad y_{11} = \cosh(2x) \qquad y_{12} = 3\tanh x$$

Γραφική Παράσταση

Γραφική παράσταση, ή **γράφημα**, μια πραγματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής είναι το σύνολο των σημείων πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο που έχουν συντεταγμένες *x*, *y*, τα οποία προκύπτουν από τον κανόνα *y*=*f*(*x*).

Για τις γραφικές παραστάσεις ισχύει το «**κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας**», σύμφωνα με το οποίο κάθε κατακόρυφη ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης το πολύ μία φορά.

Παράδειγμα γραφικής παράστασης, της συνάρτησης $y = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$:



Παρατηρήσεις

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y.

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Η γραφική παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης αποτελείται από πανομοιότυπα τμήματα που επαναλαμβάνονται κάθε περίοδο.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y_1 = f(x) + k$ είναι αυτή της $y_2 = f(x)$, μετατοπισμένη κατακόρυφα κατά k μονάδες. Για παράδειγμα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y_1 = x^2 + 1$ και $y_2 = x^2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y_1 = f(x + h)$ είναι αυτή της $y_2 = f(x)$, μετατοπισμένη οριζόντια κατά h μονάδες. Για παράδειγμα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y_1 = (x + 1)^2$ και $y_2 = x^2$.

Σύνθετη Συνάρτηση

Η συνάρτηση της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η εξαρτημένη μεταβλητή μιας άλλης συνάρτησης, ονομάζεται **σύνθετη συνάρτηση**. Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ μπορούν να δημιουργήσουν μία σύνθετη συνάρτηση, την $f(g(x))$, η οποία συμβολίζεται $(f \circ g)(x)$.

Για παράδειγμα, η $f(x) = x^2 + 1$ και η $g(x) = e^x$ μπορούν να δημιουργήσουν τη σύνθετη συνάρτηση $f\left(g(x)\right) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1$.

Το φυσικό πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης, που είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x, προκύπτει από τις τιμές x που οδηγούν στις τιμές του συνόλου που είναι η τομή του πεδίου ορισμού της f και του πεδίου τιμών της g.

Αν για παράδειγμα, η τομή του πεδίου ορισμού της f και του πεδίου τιμών της g είναι κενό, τότε η $(f \circ g)(x)$ δεν ορίζεται.