Ασκήσεις Επανάληψης Γραμμική Άλγεβρα

1. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων με τη χρήση αντίστροφου Πίνακα (που υπολογίζεται μέσω του Συμπληρωματικού Πίνακα):
   a. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -8 \\ 2x_2 + 4x_3 = 14 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 4x_1 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -15 \\ 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

2. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων με τη χρήση του κανόνα Cramer:
   a. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 8 \\ x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_3 - 2x_2 - x_1 = -4 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -14 \\ x_1 + 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -13 \end{cases}$

3. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων με τη χρήση του κανόνα Gauss:
   a. $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 48 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = -21 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -12 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΙΠΑΕ

Λύσεις

1.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \\ 14 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 + 28 = 12$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \\ 12 & 4 & -8 \\ -6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \\ 12 & 4 & -8 \\ -6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \\ 12 & 4 & -8 \\ -6 & -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 76 - 5 = 71$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 11 \\ -5 & -20 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{71}\begin{bmatrix} 19 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 11 \\ -5 & -20 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{71}\begin{bmatrix} 19 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 11 \\ -5 & -20 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$A1 = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -6 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad |A1| = \begin{vmatrix} 8 & 4 & -6 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$A2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad |A2| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$A3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad |A3| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Έχει άπειρες λύσεις

b. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -4$

$A1 = \begin{bmatrix} -14 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -13 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad |A1| = \begin{vmatrix} -14 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -13 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 24$

$A2 = \begin{bmatrix} 3 & -14 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -13 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad |A2| = \begin{vmatrix} 3 & -14 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -13 & -5 \end{vmatrix} = 8$

$A3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -14 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -13 \end{bmatrix}$ $\quad |A3| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -14 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -13 \end{vmatrix} = -4$

Συνεπώς:

$$x_1 = \frac{|A1|}{|A|} = -6 \quad x_2 = \frac{|A2|}{|A|} = -2 \quad x_3 = \frac{|A3|}{|A|} = 1$$

3.

a. $$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -6 & 48 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1\left(\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 16 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(2) \;\; H_{31}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 7 & -2 & 35 \\ 0 & -17 & 7 & -85 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_2\left(\frac{1}{7}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & 5 \\ 0 & -17 & 7 & -85 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}(17)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3\left(\frac{7}{15}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Προκύπτει:

$$x_3 = 0 \quad x_2 = 5 \quad x_1 = 1$$

b. $$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -2 & -12 \\ -2 & 5 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & -3 & 10 \\ 7 & -3 & -2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(2) \;\; H_{31}(-7)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & -5 & 6 \\ 0 & -17 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & -5 & 6 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23} \;\; H_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & -5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-9)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_3(-5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Προκύπτει:

$$x_3 = -3 \quad x_2 = -1 \quad x_1 = -3$$