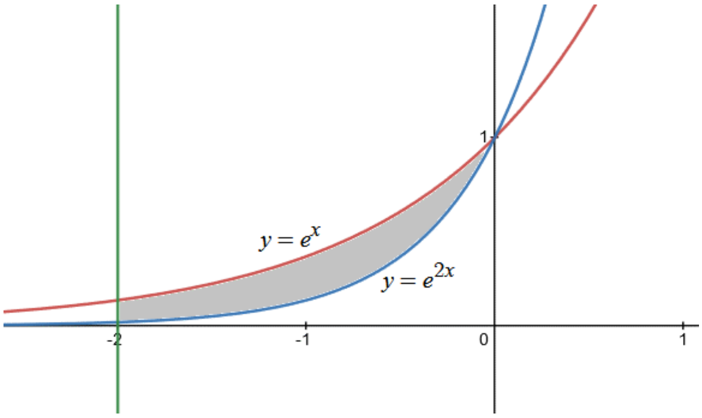
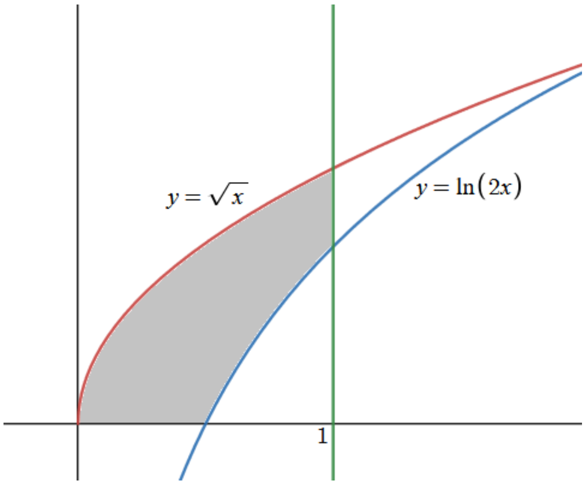
Ασκήσεις Εμβαδά και Μέσες Τιμές

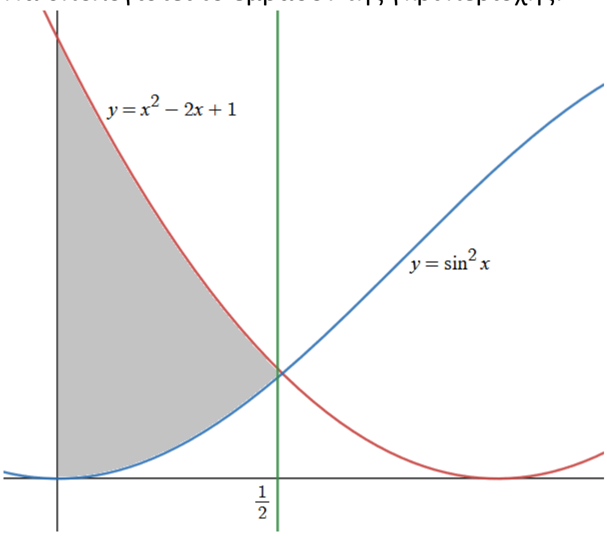
1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της γκρι περιοχής:



2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της γκρι περιοχής:



3. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της γκρι περιοχής:



Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΙΠΑΕ

4. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της $f(x, y) = e^x + \ln y$, στο ορθογώνιο χωρίο που ορίζεται από τις ευθείες *x=0*, *x=1*, *y=1*, και *y=2*.

5. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της $f(x, y) = x$, στο χωρίο της άσκησης (1).

6. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της $f(x, y) = x$, στο χωρίο της άσκησης (3)

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΙΠΑΕ

Λύσεις

1.

$$\int_{-2}^{0}\int_{e^{2x}}^{e^x} 1dy\,dx = \int_{-2}^{0}[y]_{e^{2x}}^{e^x}dx = \int_{-2}^{0}(e^x - e^{2x})dx = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{2} - e + \frac{1}{2}e^2$$

2.

$$\int_{0}^{1/2}\int_{0}^{\sqrt{x}} 1dy\,dx + \int_{1/2}^{1}\int_{\ln(2x)}^{\sqrt{x}} 1dy\,dx = \int_{0}^{1/2}[y]_0^{\sqrt{x}}dx + \int_{1/2}^{1}[y]_{\ln(2x)}^{\sqrt{x}}dx = \int_{0}^{1/2}\sqrt{x}dx + \int_{1/2}^{1}\left(\sqrt{x} - \ln(2x)\right)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1}\ln(2x)\,dx = \frac{2}{3} - [x\ln(2x)]_{1/2}^{1} + \int_{1/2}^{1} x\frac{1}{2x}2dx$$

$$= \frac{2}{3} - \ln 2 + [x]_{1/2}^{1} = \frac{5}{6} - \ln 2$$

3.

$$\int_{0}^{1/2}\int_{\sin^2 x}^{x^2-2x+1} 1dy\,dx = \int_{0}^{1/2}[y]_{\sin^2 x}^{x^2-2x+1}dx = \int_{0}^{1/2}(x^2 - 2x + 1 - \sin^2 x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^{1/2} - \int_{0}^{1/2}\sin^2 x\,dx = \frac{7}{24} - \int_{0}^{1/2}\frac{1-\cos(2x)}{2}dx$$

$$= \frac{7}{24} - \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{24} + \frac{1}{4}\sin 1$$

4. Το εμβαδόν του χωρίου είναι 1.

$$\int_{0}^{1}\int_{1}^{2}(e^x + \ln y)dy\,dx = \int_{0}^{1}[e^x y + y\ln y - y]_1^2 dx = \int_{0}^{1}(e^x + 2\ln 2 - 1)dx = [e^x + (2\ln 2 - 1)x]_0^1$$

$$= e + 2\ln 2 - 2$$

Άρα:

$$MO = e + 2\ln 2 - 2$$

5. Το εμβαδόν του χωρίου είναι $\frac{1}{2} - e + \frac{1}{2}e^2$

$$\int_{-2}^{0}\int_{e^{2x}}^{e^x} xdy\,dx = \int_{-2}^{0}[xy]_{e^{2x}}^{e^x}dx = \int_{-2}^{0}(xe^x - xe^{2x})dx = \int_{-2}^{0}xe^x dx - \int_{-2}^{0}xe^{2x}dx$$

$$= [xe^x - e^x]_{-2}^{0} - \left[\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x\right]_{-2}^{0} = -1 + 2e^{-2} + e^{-2} + \frac{1}{4} - e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2}$$

$$= \frac{7}{4}e^{-2} - \frac{3}{4}$$

Άρα:

$$MO = \frac{7e^{-2} - 3}{2 - 4e + 2e^2}$$

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΙΠΑΕ

6. Το εμβαδόν του χωρίου είναι $\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\sin 1$

$$\int_0^{1/2}\int_{\sin^2 x}^{x^2-2x+1} xdy\,dx = \int_0^{1/2} [xy]_{\sin^2 x}^{x^2-2x+1} dx = \int_0^{1/2} (x^3-2x^2+x-x\sin^2 x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} x\frac{1-\cos(2x)}{2}dx$$

$$= \frac{11}{192} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \cos(2x)\,dx = \frac{11}{192} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^{1/2} = \frac{1}{4}\sin 1 - \frac{1}{192}$$

Άρα:

$$MO = \frac{\sin 1 - \frac{1}{48}}{\sin 1 + \frac{1}{6}}$$