Ασκήσεις Διπλά Ολοκληρώματα

1. Να υπολογιστούν τα διπλά ολοκληρώματα των συναρτήσεων:
   a. $f(x,y) = 1 - 6x^2y$ για $0 \le x \le 2$ και $-1 \le y \le 1$
   b. $f(x,y) = xy(1-3y)$ για $0 \le x \le 2$ και $1 \le y \le 2$
   c. $f(x,y) = e^y \cos x$ για $0 \le x \le \pi/2$ και $0 \le y \le 1$
   d. $f(x,y) = x\sin(xy)$ για $0 \le x \le \pi/2$ και $1 \le y \le 2$
   e. $f(x,y) = e^{2x+y}$ για $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le 1$
   f. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ για $0 \le x \le 1$ και $1 \le y \le 2$

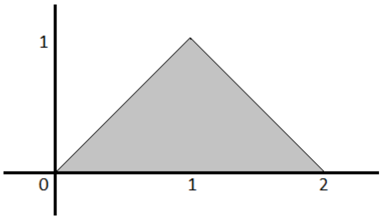
2. Να υπολογιστούν τα διπλά ολοκληρώματα:
   a. $\iint (42y^2 - 12x)dA$ για $0 \le x \le 4$ και $(x-2)^2 \le y \le 6$
   b. $\iint \frac{y}{x^5+1} dA$ για $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le x^2$
   c. $\iint x^3 dA$ για $1 \le x \le e$ και $0 \le y \le \ln x$
   d. $\iint x^2(y-x)dA$ για $0 \le x \le 1$ και $x^2 \le y \le \sqrt{x}$
   e. $\iint \sin^2 x \, dA$ για $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ και $0 \le y \le \cos x$
   f. $\iint yx\sin x^2 \, dA$ για $0 \le y \le 1$ και $y \le x \le 1$
   g. $\iint ye^x dA$ για $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le x$
   h. $\iint 2x \sin y \, dA$ για $1 \le x \le 2$ και $0 \le y \le x^2$

3. Να υπολογιστεί ο όγκος:
   a. που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο *z=y+2* και πάνω από τον κυκλικό δίσκο που βρίσκεται στο επίπεδο *xy*, έχει κέντρο το κέντρο των αξόνων, και ακτίνα 1.
      Δίνεται ότι το ολοκλήρωμα του $\sqrt{1-x^2}$ είναι $\frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$
   b. που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια *z=lnx+lny* και πάνω από το χωρίο που ορίζεται από τις ευθείες *x=2*, *x=3*, *y=2*, και *y=3*.

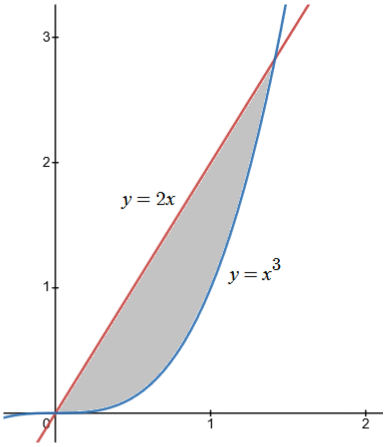
Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΙΠΑΕ

4. Να υπολογιστούν τα διπλά ολοκληρώματα:

a. $\iint y\sqrt{x}dA$ στο χωρίο



b. $\iint \frac{1}{\sqrt{y}}dA$ στο χωρίο



Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΙΠΑΕ

Λύσεις

1.

a. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(1-6x^2y)dx\,dy = \int_{-1}^{1}[x-2x^3y]_0^2 dy = \int \quad (2-16y)\,dy = [2y-8y^2]_{-1}^{1} = 4$

b. $\int_{1}^{2}\int_{0}^{2} xy(1-3y)dx\,dy = \int_{1}^{2}\int_{0}^{2}(xy-3xy^2)dx\,dy = \int_{1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y-\frac{3}{2}x^2y^2\right]_0^2 dy = \int_{1}^{2}(2y-6y^2)dy = [y^2-2y^3]_1^2 = -11$

c. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi/2} e^y\cos x\,dx\,dy = \int_{0}^{1}[e^y\sin x]_0^{\pi/2}dy = \int_{0}^{1} e^y dy = [e^y]_0^1 = e-1$

d. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{1}^{2} x\sin(xy)\,dy\,dx = \int_{0}^{\pi/2}\left[-x\frac{1}{x}\cos(xy)\right]_1^2 dx = \int_{0}^{\pi/2}(-\cos 2x+\cos x)dx = \left[-\frac{1}{2}\sin 2x + \sin x\right]_0^{\pi/2} = 1$

e. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} e^{2x+y}dx\,dy = \int_{0}^{1}\left[\frac{1}{2}e^{2x+y}\right]_0^1 dy = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(e^{y+2}-e^y)dy = \frac{1}{2}[e^{y+2}-e^y]_0^1 = \frac{1}{2}(e^3-e^2-e+1)$

f. $\int_{1}^{2}\int_{0}^{1}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy = \int_{1}^{2}\left[y\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^1 dy = \int_{1}^{2}\left(y\sqrt{y^2+1}-y^2\right)dy = \left[\frac{1}{3}\sqrt{y^2+1}^3-\frac{y^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}-7\right)$

2.

a. $\int_{0}^{4}\int_{(x-2)^2}^{6}(42y^2-12x)dy\,dx = \int_{0}^{4}[14y^3-12xy]_{(x-2)^2}^{6}dx = \int_{0}^{4}(3024-72x-14(x-2)^6+12x(x-2)^2)dx = \int_{0}^{4}(3024-24x-14(x-2)^6+12x^3-48x^2)dx = [3024x-12x^2-2(x-2)^7+3x^4-16x^3]_0^4 =$

b. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2}\frac{y}{x^5+1}dy\,dx = \int_{0}^{1}\frac{1}{x^5+1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{x^4}{x^5+1}dx = \frac{1}{10}[\ln(x^5+1)]_0^1 = \frac{1}{10}\ln 2$

c. $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} x^3 dy\,dx = \int_{1}^{e}[x^3y]_0^{\ln x}dx = \int_{1}^{e} x^3\ln x\,dx \xrightarrow{u=\ln x, v'=x^3} \frac{1}{4}[x^4\ln x]_1^e - \int_{1}^{e}\frac{1}{4}x^4\frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}[x^4\ln x]_1^e - \frac{1}{16}[x^4]_1^e = \frac{3}{16}e^4+\frac{1}{16}$

d. $\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2(y-x)dy\,dx = \int_{0}^{1}\left[\frac{x^2}{2}y^2-x^3y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3-x^3\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^6+x^5\right)dx = \left[\frac{1}{8}x^4-\frac{2}{9}x^{9/2}-\frac{1}{14}x^7+\frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{8}-\frac{2}{9}-\frac{1}{14}+\frac{1}{6} = -\frac{1}{504}$

e. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos x}\sin^2 x\,dy\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}[y\sin^2 x]_0^{\cos x}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\sin^2 x\,dx = \left[-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}$

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΙΠΑΕ

f. $\int_0^1\int_y^1 yx\sin(x^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left[-\frac{1}{2}y\cos(x^2)\right]_y^1 dy = \int_0^1\left(-\frac{1}{2}\cos 1\, y+\frac{1}{2}y\cos(y^2)\right)dy =$

$\left[-\frac{1}{4}\cos 1\, y^2+\frac{1}{4}\sin(y^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\cos 1+\frac{1}{4}\sin 1$

g. $\int_0^1\int_0^x ye^x dy\,dx = \int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2e^x\right]_0^x dx = \int_0^1\frac{1}{2}x^2e^x dx = \frac{1}{2}\left([x^2e^x]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx\right)=\frac{1}{2}e -$

$\int_0^1 xe^x dx = \frac{1}{2}e - [xe^x]_0^1+\int_0^1 e^x dx = \frac{1}{2}e - e + [e^x]_0^1 = \frac{1}{2}e - e + e - 1 = \frac{1}{2}e - 1$

h. $\int_1^2\int_0^{x^2} 2x\sin y\,dy\,dx = \int_1^2[-2x\cos y]_0^{x^2}dx = \int_1^2 -2x\cos(x^2)\,dx = -[x\sin(x^2)]_1^2 = 2\sin 4 -$

$\sin 1$

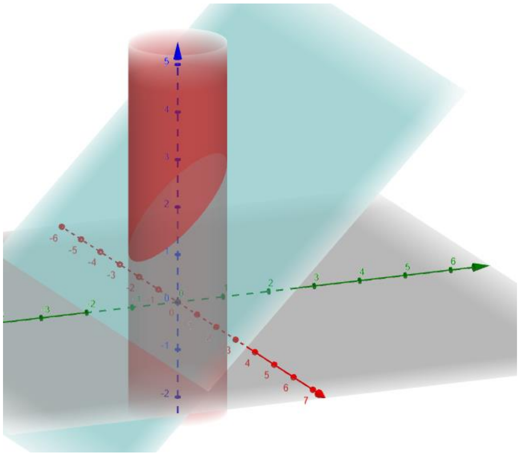
3.

a. Για τον κυκλικό δίσκο ισχύει $x^2+y^2\le 1$. Άρα τα σύνορα του χωρίου ορίζονται από τα $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ και $x^2\le 1$

Άρα:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(y+2)dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1}4\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = 4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi$$



b. Το χωρίο είναι ορθογώνιο που οριοθετείται από τα σημεία (2,2), (2,3), (3,2), και (3,3). Άρα:

$$\int_2^3\int_2^3(\ln x+\ln y)dy\,dx = \int_2^3[y\ln x+y\ln y-y]_2^3 dx = \int_2^3\left(\ln x+\ln\frac{27}{4}-1\right)dx$$

$$= \left[x\ln x - x + \left(\ln\frac{27}{4}-1\right)x\right]_2^3$$

4.

a. Για 0≤x≤1 είναι y=x   για 1<x≤2 είναι y=2-x

$$\int_0^1\int_0^x y\sqrt{x}dy\,dx+\int_1^2\int_0^{2-x} yxdy\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2\sqrt{x}\right]_0^x dx+\int_1^2\left[\frac{1}{2}y^2\sqrt{x}\right]_0^{2-x} dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{5/2}dx+\frac{1}{2}\int_1^2 (2-x)^2\sqrt{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{5/2}dx+2\int_1^2 \sqrt{x}dx-2\int_1^2 x\sqrt{x}dx+\frac{1}{2}\int_1^2 x^{5/2}dx$$

$$=\frac{1}{7}\left[x^{7/2}\right]_0^1+\frac{4}{3}\left[x^{3/2}\right]_1^2-\frac{4}{5}\left[x^{5/2}\right]_1^2+\frac{1}{7}\left[x^{7/2}\right]_1^2$$

b. $2x=x^3\Rightarrow x(x^2-2)=0\Rightarrow x=0,\quad x=\sqrt{2},\quad x=-\sqrt{2}$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_{x^3}^{2x}\frac{1}{\sqrt{y}}dy\,dx=\int_0^{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{y}\right]_{x^3}^{2x}dx=2\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{x^3}\right)dx=2\left[\sqrt{2}\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=4\left(\sqrt{2}\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{2}^3}-\frac{1}{5}\sqrt{\sqrt{2}^5}\right)=\frac{16}{15}\sqrt[4]{2}$$