Ασκήσεις Διπλά Ολοκληρώματα
Γενικά Χωρία

Να υπολογιστούν τα διπλά ολοκληρώματα:

1. $\iint (42y^2 - 12x)dA$ για $0 \le x \le 4$ και $(x-2)^2 \le y \le 6$
2. $\iint \frac{y}{x^5+1} dA$ για $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le x^2$
3. $\iint x^3 dA$ για $1 \le x \le e$ και $0 \le y \le \ln x$
4. $\iint x^2(y-x)dA$ για $0 \le x \le 1$ και $x^2 \le y \le \sqrt{x}$
5. $\iint \sin^2 x \, dA$ για $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ και $0 \le y \le \cos x$

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΙΠΑΕ

Λύσεις

1. $\int_0^4 \int_{(x-2)^2}^6 (42y^2 - 12x) dy\, dx = \int_0^4 [14y^3 - 12xy]_{(x-2)^2}^6 dx = \int_0^4 (3024 - 72x - 14(x-2)^6 + 12x(x-2)^2) dx = \int_0^4 (3024 - 24x - 14(x-2)^6 + 12x^3 - 48x^2) dx = [3024x - 12x^2 - 2(x-2)^7 + 3x^4 - 16x^3]_0^4$

2. $\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{y}{x^5+1} dy\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^5+1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4}{x^5+1} dx = \frac{1}{10}[\ln(x^5+1)]_0^1 = \frac{1}{10}\ln 2$

3. $\int_1^e \int_0^{\ln x} x^3 dy\, dx = \int_1^e [x^3 y]_0^{\ln x} dx = \int_1^e x^3 \ln x\, dx \xrightarrow{u=\ln x, v'=x^3} \frac{1}{4}[x^4 \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4} x^4 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4}[x^4 \ln x]_1^e - \frac{1}{16}[x^4]_1^e = \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}$

4. $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2(y-x) dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}y^2 - x^3 y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - x^3\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^6 + x^5\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{9}x^{9/2} - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{504}$

5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} \sin^2 x\, dy\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y \sin^2 x]_0^{\cos x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sin^2 x\, dx = \left[-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}$

Δρ. Ιωάννης Τσιμπερίδης
ΕΔΙΠ Τμ. Πληροφορικής ΔΙΠΑΕ