

## Ασκήσεις Επανάληψης Γραμμικής Άλγεβρας

1. Εάν ο Πίνακας  $A$  είναι ο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\frac{1}{3}(A^2 - 15 \cdot A - 18 \cdot I)$$

2. Να υπολογιστεί η Ορίζουσα του Πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Με τον υπολογισμό του Αντίστροφου Πίνακα, μέσω του Συμπληρωματικού Πίνακα.

4. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο Gauss-Jordan:

a. 
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ -6x_1 + 3x_2 + x_3 = 26 \\ 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

5. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των ακόλουθων Πινάκων, με τη μέθοδο Gauss-Jordan:

a. 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. 
$$B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

## Λύσεις

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(A^2 - 15 \cdot A - 18 \cdot I) &= \frac{1}{3} \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^2 - 15 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 18 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 30 & 45 \\ 60 & 75 & 90 \\ 105 & 120 & 135 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot \left( \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = -5 \cdot (-9 - 2 + 18) = -35 \end{aligned}$$

$$3. \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9) + 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-17) = -21$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 3 & -3 \\ -7 & 0 & -7 \\ -17 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A) = -\frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} -9 & 3 & -3 \\ -7 & 0 & -7 \\ -17 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} -9 & 3 & -3 \\ -7 & 0 & -7 \\ -17 & -6 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{H_{21}(-1) \quad H_{31}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{H_{32}(-5)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}(1) \quad H_{13}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{H_{12}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ -6 & 3 & 1 & 26 \\ 8 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(6) \ H_{31}(-8)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 15 & -5 & 80 \\ 0 & -18 & 11 & -71 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 15 & -5 & 80 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 15 & -5 & 80 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 15 & -5 & 80 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-15)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 25 & 125 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2\left(\frac{1}{25}\right)} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}(2) \ H_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\
& x_1 = 0 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 5
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\text{a. } & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}(2)} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-2)} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } & \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \\
& \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(4) \ H_3(2)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{H_{12}\left(\frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$