Ασκήσεις Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

1. Με τη βοήθεια του αντίστροφου Πίνακα να βρεθεί η λύση των ακόλουθων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων:

   a. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 11 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -12 \end{cases}$

2. Να εξεταστεί το εάν και πόσες λύσεις έχουν τα συστήματα:

   a. $\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

3. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα γραμμικών εξισώσεων με τον κανόνα Cramer:

   a. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

4. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα γραμμικών εξισώσεων με τον κανόνα Gauss:

   a. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20 \\ -x_1 + x_2 + 4x_4 = 3 \end{cases}$

Λύσεις

1.
   a. $A \cdot X = B$

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$

   $|A| = 27 \qquad A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -1 & 8 & 5 \\ 5 & -13 & 2 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

   $X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

   b. $A \cdot X = B$

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \\ -12 \end{bmatrix}$

   $|A| = -31 \qquad A^{-1} = -\frac{1}{31}\begin{bmatrix} -17 & -2 & 5 \\ -18 & 7 & -2 \\ 4 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

   $X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.
   a. $A \cdot X = B$

   $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A|B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

   rank(A)=2 rank(A|B)=3 rank(A)≠rank(A|B) δεν έχει λύσεις

   b. $A \cdot X = B$

   $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad A|B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

   rank(A)=2 rank(A|B)=2 rank(A)=rank(A|B)<3 έχει άπειρες λύσεις

3.
   a. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -14 \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 14$

   $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -28$

   $x_1 = \frac{14}{-14} = -1 \qquad x_2 = \frac{0}{-14} = 0 \qquad x_3 = \frac{-28}{-14} = 2$

   b. $|A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+3) \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-2)$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(2\lambda-1) \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1)$$

Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -3$

$x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)} \qquad x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \qquad x_3 = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$

Για λ=-3 δεν υπάρχουν λύσεις

Για λ=0 υπάρχουν άπειρες λύσεις

4.

a. $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)\ \ H_{31}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(1/3)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-7)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3(-1/8)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

b. $$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ -1 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 2 & -3 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & -7 & -5 & -13 & -44 \\ 0 & -6 & -11 & -13 & -53 \\ 0 & 3 & 3 & 8 & 23 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & -6 & -11 & -13 & -53 \\ 0 & 3 & 3 & 8 & 23 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & -6 & -11 & -13 & -53 \\ 0 & 3 & 3 & 8 & 23 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -47 & -13 & -107 \\ 0 & 0 & 21 & 8 & 50 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{34}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 21 & 8 & 50 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{43}(4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{34}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 22 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 103 & 103 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20 \\ x_2 - 6x_3 = -9 \\ x_3 + 20x_4 = 22 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$