

Ασκήσεις Αντίστροφος Πίνακας

1. Να βρεθούν ο συμπληρωματικός (adjugate) Πίνακας για καθένα από τους επόμενους:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

2. Να βρεθεί ο αντίστροφος του Πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Να βρεθεί ο αντίστροφος του Πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Λύσεις

1.

$$\text{a. } adj(A) = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -16 \\ 9 & -11 & -3 \\ -12 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } adj(B) = \begin{bmatrix} |B_{11}| & -|B_{21}| & |B_{31}| \\ -|B_{12}| & |B_{22}| & -|B_{32}| \\ |B_{13}| & -|B_{23}| & |B_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 52 = 38$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -8 & 12 \\ 13 & 2 & -3 \\ -4 & 14 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} -14 & -8 & 12 \\ 13 & 2 & -3 \\ -4 & 14 & -2 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 30$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| & -|A_{41}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| & |A_{42}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| & -|A_{43}| \\ -|A_{14}| & |A_{24}| & -|A_{34}| & |A_{44}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -25 & -35 & 6 \\ 0 & 10 & -10 & -6 \\ 0 & 0 & 30 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 15 & -25 & -35 & 6 \\ 0 & 10 & -10 & -6 \\ 0 & 0 & 30 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$