ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων
Λύση γραμμικών συστημάτων

- Ένα γραμμικό σύστημα *n* εξισώσεων με *m* αγνώστους

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= \beta_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \ &\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= \beta_n \end{aligned}$$

- με τη βοήθεια πινάκων γράφεται στη μορφή $\boldsymbol{AX = B}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Ο $n \times m$ πίνακας A λέγεται **πίνακας του συστήματος**, ο $m \times 1$ πίνακας-στήλη X, **πίνακας των αγνώστων** και ο $n \times 1$ πίνακας-στήλη B, **πίνακας των σταθερών όρων**.

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Λύση γραμμικών συστημάτων

- **Επαυξημένο πίνακα** $A|B$ λέμε τον πίνακα που περιέχει τον πίνακα A και τον πίνακα-στήλη των σταθερών όρων

$$A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} & \beta_n \end{array}\right]$$

- Αν ο πίνακας A του $n \times n$ συστήματος (n εξισώσεις με n αγνώστους)

$$AX = B$$

είναι αντιστρέψιμος, τότε η **λύση του συστήματος** είναι

$$X = A^{-1}B$$

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Λύση γραμμικών συστημάτων

Παράδειγμα

- Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 &= -1 \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>

- Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή *AX* = *B*, όπου: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

- Βρίσκουμε ότι ο *A* είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Λύση γραμμικών συστημάτων

Λύση (συνέχεια)

- Οπότε ισχύει ότι: $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$

- Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος αυτού είναι:

$$x_1 = -13, \; x_2 = -5, \; x_3 = 7$$

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων
Λύση γραμμικών συστημάτων

Επιλυσιμότητα γραμμικών συστημάτων

- Το γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει **λύσεις** αν και μόνον αν ***rank*(*A*) = *rank*(*A*|*B*)**
  - Επομένως αν ***rank*(*A*)** $\neq$ ***rank*(*A*|*B*)** το σύστημα **δεν έχει λύσεις**
- Αν A ο πίνακας ενός γραμμικού $n \times m$ συστήματος (n εξισώσεις με m αγνώστους) και $A|B$ ο επαυξημένος του, τότε:
  - Αν ***rank*(*A*) = *rank*(*A*|*B*) = *k* (< *m*)**, τότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**, στις οποίες βρίσκουμε τους k αγνώστους συναρτήσει των άλλων $m - k$ αγνώστων για ένα $k \times k$ σύστημα που προκύπτει θεωρώντας ελεύθερες παραμέτρους (παίρνουν κάθε πραγματική τιμή) τους άλλους $m-k$ αγνώστους με μη μηδενική ορίζουσα
  - Αν ***rank*(*A*) = *rank*(*A*|*B*) = *m***, τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** που προκύπτει για ένα $m \times m$ υποσύστημα που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ορίζουσα
  - `Ενα $n \times m$ (n εξισώσεις με m αγνώστους) σύστημα με όχι λιγότερους αγνώστους από εξισώσεις ($n \leq m$) και ***rank*(*A*) = *n*** έχει πάντα λύσεις (**μία λύση αν *n* = *m* και άπειρες αν *n* < *m***).

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Λύση γραμμικών συστημάτων

Παράδειγμα

- Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>

- Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή *AX* = *B*, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A προκύπτει ότι $|A| = 0$
- Επίσης η 2 × 2 υποορίζουσα $|A_{11}|$ που προκύπτει διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και στήλη είναι:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) = 3 \neq 0$$

Οπότε $rank(A) = 2$

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων
Λύση γραμμικών συστημάτων

Λύση (... συνέχεια)

- `Ομοια προκύπτει ότι *rank*(*A*|*B*) = 2
- Οπότε μπορούμε να βρούμε τους 2 αγνώστους συναρτήσει του τρίτου, π.χ. τους x_2, x_3 συναρτήσει του x_1 από το σύστημα της δεύτερης και τρίτης εξίσωσης (αντιστοιχεί στην παραπάνω μη μηδενική 2 × 2 υποορίζουσα του A) θεωρώντας τον x_1 γνωστό

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -2x_1 - 2 \\ x_2 + x_3 &= -3x_1 - 1 \end{aligned}$$

- Προσθέτοντας τις εξισώσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει:

$$2x_2 + x_2 = -2x_1 - 2 - 3x_1 - 1 \Leftrightarrow 3x_2 = -5x_1 - 3 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{3}x_1 - 1$$

- Οπότε η δεύτερη εξίσωση δίνει: $x_3 = -3x_1 - x_2 - 1 = -3x_1 - \left(-\frac{5}{3}x_1 - 1\right) - 1 = -\frac{4}{3}x_1$

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Λύση γραμμικών συστημάτων

Λύση (… συνέχεια)

- Επομένως, η **λύση του συστήματος** είναι (θέτοντας $x_1 = k$):

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(k, -\frac{5k}{3} - 1, -\frac{4k}{3}\right), \qquad k \in \mathbb{R}$$

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Λύση γραμμικών συστημάτων

Παράδειγμα

- Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>

- Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή *AX* = *B*, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A προκύπτει ότι $|A| = 0$, καθώς και ότι καμία ελάσσων ορίζουσά του 2×2 δεν είναι διαφορετική του μηδενός, άρα $rank(A) = 1$
- Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$A|B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & 5 \\ 6 & -3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Λύση γραμμικών συστημάτων

Λύση (… συνέχεια)

- Για τους υποπίνακες του επαυξημένου πίνακα ισχύει ότι:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$rank(A|B) = 2.$$

- Επομένως, το σύστημα αυτό **δεν έχει λύσεις**, καθώς $rank(A) \neq rank(A|B)$

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Κανόνας Cramer

- Για ένα $n \times n$ σύστημα $AX = B$
  - Αν η ορίζουσα του πίνακα A του συστήματος δεν είναι μηδέν ($|A| \neq 0$), τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση: $$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \cdots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$
  - Όπου $A_1, A_2, \dots, A_n$ οι ορίζουσες που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε στην $|A|$ τη στήλη των συντελεστών των $x_1, x_2, \dots, x_n$ αντίστοιχα με τη στήλη των σταθερών όρων
  - Αν $|A| = 0$, τότε:
    - Αν κάποια από τις ορίζουσες $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ είναι μη μηδενική, τότε το σύστημα δεν έχει λύσεις (αδύνατο)
    - Αν $|A_1| = |A_2| =, \dots, = |A_n| = 0$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τις οποίες βρίσκουμε όπως έχουμε ήδη δει

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Κανόνας Cramer

Παράδειγμα

- Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>

- Η ορίζουσα του πίνακα *A* του συστήματος είναι:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

- Οπότε, το σύστημα αυτό έχει τη μοναδική λύση:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Συνεπώς: $x_1 = \frac{7}{5}, \quad x_2 = -\frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{0}{5} = 0$

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Κανόνας Cramer

Παράδειγμα

- Να λυθεί το σύστημα: $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

<u>Λύση</u>

- Η ορίζουσα του πίνακα A του συστήματος είναι: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$$

- Η ορίζουσα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την πρώτη στήλη του A με τους σταθερούς όρους είναι μηδέν, οπότε το σύστημα αυτό δεν έχει λύσεις (είναι αδύνατο):

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ομογενή Συστήματα

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Αν όλοι οι σταθεροί όροι ενός συστήματος είναι μηδέν, τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές**.
- Ένα ομογενές σύστημα γράφεται σε μορφή πινάκων ως:

$$AX = B, \quad \text{όπου } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad AX = 0$$

- Άρα, σε κάθε περίπτωση ομογενούς συστήματος ισχύει: ***rank*(*A*|*B*) = *rank*(*A*)**
- Οπότε, ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα τουλάχιστον μία λύση (την προφανή μηδενική (0, 0, ..., 0))
- Για ένα ομογενές σύστημα $AX = 0$ ισχύει:
  - Αν $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$, τότε το σύστημα έχει **μόνο τη μηδενική λύση** (0, 0, ..., 0).
  - Αν $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$, τότε έχει **άπειρες λύσεις**

Ομογενή Συστήματα

Παράδειγμα

- Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>

- Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή: $\boldsymbol{AX = B}$, όπου: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

- Επειδή $|A| \neq 0$, το ομογενές αυτό σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική:

$$\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = 0}$$

Κανόνας Gauss

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Η μέθοδος Gauss είναι μία μέθοδος λύσης οποιουδήποτε γραμμικού συστήματος και είναι μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε προγράμματα ηλεκτρονικών υπολογιστών για τη λύση γραμμικών συστημάτων
- Για την κατανόηση της μεθόδου είναι απαραίτητο να ξεκινήσουμε με κάποιες παρατηρήσεις:
  - Αν διαιρέσουμε όλους τους όρους μίας εξίσωσης ενός συστήματος με έναν αριθμό, τότε προκύπτει ισοδύναμο σύστημα
  - Επίσης, αν αντικαταστήσουμε μία εξίσωση ενός συστήματος με αυτή που προκύπτει αν προσθέσουμε σε αυτή μία από τις άλλες εξισώσεις πολλαπλασιασμένη επί έναν οποιονδήποτε αριθμό, προκύπτει ισοδύναμο σύστημα

Κανόνας Gauss

- Γενικότερα από ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων μπορούμε να οδηγηθούμε σε ένα ισοδύναμο σύστημα με τη βοήθεια των επόμενων διαδικασιών:
  - Πολλαπλασιάζοντας μία εξίσωση επί έναν αριθμό
  - Αντικαθιστώντας μία εξίσωση με την εξίσωση που προκύπτει προσθέτοντας σε αυτή μία από τις άλλες εξισώσεις πολλαπλασιασμένη επί έναν αριθμό
- Έτσι, προκύπτει η επόμενη παρατήρηση για τη λύση ενός οποιουδήποτε συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Κανόνας Gauss

- Αν στον επαυξημένο πίνακα ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων εφαρμόσουμε μία ή περισσότερες από τις παρακάτω διαδικασίες, που λέγονται “στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών”:
  - αμοιβαία **αλλαγή δύο γραμμών** (H_{ij}),
  - **πολλαπλασιασμός μίας γραμμής** επί έναν μη μηδενικό αριθμό ($H_i(k)$),
  - **αντικατάσταση μίας γραμμής** με τη γραμμή που προκύπτει προσθέτοντας σε αυτή μία άλλη γραμμή του πολλαπλασιασμένη επί έναν αριθμό ($H_{ij}(k)$),

τότε προκύπτει πίνακας που αντιστοιχεί σε σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό

Κανόνας Gauss

- Έτσι, για να λύσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων προσπαθούμε να οδηγηθούμε με **στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών από τον επαυξημένο πίνακα** του συστήματος σε έναν πίνακα που αντιστοιχεί σε μία προφανή λύση του συστήματος
- Μία τέτοια μορφή είναι ο **κλιμακωτός πίνακας**, τον οποίο ορίζουμε στη συνέχεια
- Ένας πίνακας λέγεται κλιμακωτός αν:
  - **Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής του είναι το 1** και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης γραμμής
  - **Οι μηδενικές γραμμές είναι μετά τις μη μηδενικές**

Κανόνας Gauss

Ο Στόχος (κλιμακωτός):

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

Αφού φέρουμε σε αυτή τη μορφή τον επαυξημένο πίνακα, τοποθετούμε ξανά τις μεταβλητές και επιλύουμε με αντικατάσταση

Πραγματοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών:

$$x+2y+z=1$$
$$3x+5y+z=3$$
$$2x+6y+7z=1$$

Ήδη έχουμε το ‘1’ εκεί που απαιτείται

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

Ο επαυξημένος πίνακας

Δουλεύουμε πρώτα σε αυτή τη στήλη. Χρησιμοποιούμε το ‘1’ ως “εργαλείο” για να λάβουμε μηδενικά από κάτω με μετασχηματισμούς γραμμών

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με –3 και την προσθέτουμε στη 2η γραμμή για να λάβουμε 0. Ο συμβολισμός γι’ αυτό το βήμα είναι: $-3\Gamma_1+\Gamma_2$ (που αντιστοιχεί στο $H_{21}(-3)$) και γράφεται δίπλα στη γραμμή που θα αντικατασταθεί

Ο Στόχος:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} \# \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \# \\ \# \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \# \\ \# \\ \# \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$-3\Gamma_1+\Gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-2\Gamma_1+\Gamma_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Τώρα η πρώτη στήλη είναι σύμφωνη με τον στόχο

$$\begin{array}{rrrrr} -3\Gamma_1 & -3 & -6 & -3 & -3 \\ +\Gamma_2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ \hline & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} -2\Gamma_1 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ +\Gamma_3 & 2 & 6 & 7 & 1 \\ \hline & 0 & 2 & 5 & -1 \end{array}$$

Τώρα θα προσθέσουμε -2 φορές την $1^η$ γραμμή στην $3^η$ για προκύψει 0

$$\begin{array}{c} \\ -\Gamma_2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{+1} & +2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2\Gamma_2+\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Χρειάζεται ‘1’ στη 2η γραμμή και 2η στήλη, οπότε πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή με -1

Χρησιμοποιούμε τη 2η γραμμή με το ‘1’ ως εργαλείο για να προκύψει ‘0’ από κάτω, πολλαπλασιάζοντάς την με -2 και προσθέτοντάς την στην 3η γραμμή

$$\begin{array}{rrrrr} -2\Gamma_2 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ +\Gamma_3 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Η 2η στήλη έχει πλέον τη ζητούμενη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{\#} & \# & \# \\ 0 & \boxed{1} & \# & \# \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \# \end{bmatrix}$$

Τώρα θα ασχοληθούμε με τη 2η στήλη και θα πραγματοποιήσουμε μετασχηματισμούς γραμμών

$x=-2$ $\quad$ $y=2$

$$x+2(2)+(-1)=1$$
$$y+2(-1)=0$$
$$z=-1$$

$$\begin{array}{cccc} x\ \text{στήλη} & y\ \text{στήλη} & z\ \text{στήλη} & \text{ίσον} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

Αντικαθιστούμε με ‘−1’ το *z* στη 2η εξίσωση για να βρούμε το *y*

Αντικαθιστούμε με ‘−1’ το *z* και με ‘2’ το y για να βρούμε το x

Τώρα ασχολούμαστε με την 3η στήλη και βλέπουμε ότι για το στόχο μας απαιτείται ‘1’ στην 3η γραμμή και 3η στήλη. Ήδη υπάρχει, οπότε ο στόχος επετεύχθη και επιστρέφουμε για αντικατάσταση. Τοποθετούμε ξανά τις μεταβλητές και το « = »

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \boxed{\#} & \# \\ 0 & 1 & \boxed{\#} & \# \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \# \end{bmatrix}$$

Η λύση είναι: (−2 , 2 , −1)

$$x+2y+z=1$$
$$3x+5y+z=3$$
$$2x+6y+7z=1$$

Η λύση είναι: $(-2\ ,\ 2\ ,\ -1)$

Αυτός είναι ο μοναδικός συνδυασμός (x, y, z) που ικανοποιεί και τις τρεις εξισώσεις

$$(-2)+2(2)+(-1)=1$$
$$3(-2)+5(2)+(-1)=3$$
$$2(-2)+6(2)+7(-1)=1$$

Όλες αληθεύουν

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι έχουμε τρία επίπεδα που διασταυρώνονται σε ένα σημείο, τη μοναδική λύση

Κανόνας Gauss

Μέθοδος Gauss – Jordan

- Η μέθοδος **Gauss – Jordan** αφορά τον περαιτέρω μετασχηματισμό του επαυξημένου πίνακα με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, ώστε μετατραπεί σε **ανηγμένο κλιμακωτό**
- Ένας πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός** αν:
  - Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής του είναι το 1 και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης γραμμής
  - Οι μηδενικές γραμμές είναι μετά τις μη μηδενικές
  - ***Το πρώτο από αριστερά 1 κάθε γραμμής είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία βρίσκεται***

Κανόνας Gauss
Μέθοδος Gauss – Jordan

Ο Στόχος (ανηγμένος κλιμακωτός):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \# \\ 0 & 1 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

Αυτή η μέθοδος δεν απαιτεί υπολογισμούς με προς τα πίσω αντικατάσταση, αφού η λύση είναι άμεσα εμφανής

Δοκιμάζουμε τη συγκεκριμένη μέθοδο στο πρόβλημα που προηγήθηκε. Χρησιμοποιούμε τον κλιμακωτό πίνακα που είχε τελικά προκύψει.

$$
\begin{aligned}
x+2y+z&=1\\
3x+5y+z&=3\\
2x+6y+7z&=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
3r_3+r_1\\
-2r_3+r_2\\
\\
\end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$\boxed{x=-2,\ \ y=2,\ \ z=-1}$$

Δημιουργούμε το ‘0’ που απαιτείται στη 2η στήλη χρησιμοποιώντας τη 2η γραμμή σαν εργαλείο

Παρατηρήστε ότι με την προσθήκη των μεταβλητών και των ‘=’ έχουμε απευθείας τη λύση

Ο Στόχος:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \# \\ 0 & 1 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την 3η γραμμή σαν εργαλείο για να δουλέψουμε στην 3η στήλη και να δημιουργήσουμε τα μηδενικά πάνω από το ‘1’

Κανόνας Gauss

Μέθοδος Gauss – Jordan

Η διαδικασία της μετατροπής του επαυξημένου πίνακα σε κλιμακωτή ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών και η διαδικασία της επεξεργασίας των εξισώσεων για την απάλειψη μεταβλητών λέγεται:

Απαλοιφή Gauss

Παράδειγμα (σύστημα χωρίς λύση)

$$\begin{aligned} 3x-2y+2z&=6 \\ 2x-3y+4z&=0 \\ 7x-3y+2z&=-1 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε την 1η γραμμή σαν εργαλείο για να δημιουργήσουμε τα ‘0’ από κάτω

$$\begin{array}{c} \Gamma_1-\Gamma_2 \\ -2\Gamma_1+\Gamma_2 \\ -7\Gamma_1+\Gamma_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 8 & -12 \\ 0 & -10 & 16 & -43 \end{bmatrix}$$

Η 1η στήλη έχει τη ζητούμενη μορφή. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με 2η στήλη.

Αν αφαιρέσουμε τη 2η γραμμή από την 1η γραμμή, θα προκύψει το ‘1’ που χρειάζεται για την 1η στήλη

Ο Στόχος: $\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 8 & -12 \\ 0 & -10 & 16 & -43 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x-2y+2z&=6 \\ 2x-3y+4z&=0 \\ 7x-3y+2z&=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \\ -1/5\Gamma_2 \\ 10\Gamma_2+\Gamma_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη 2η γραμμή σαν εργαλείο για να προκύψουν τα μηδενικά από κάτω

Παρατήρηση: Επανατοποθετώντας τις μεταβλητές και τα ‘=’ η τελευταία εξίσωση γίνεται 0 = −19 που είναι ψευδές

ΚΑΜΙΑ ΛΥΣΗ

Αν πολλαπλασιάσουμε τη 2η γραμμή με −1/5, προκύπτει το ‘1’ που απαιτείται στη 2η στήλη

Ο Στόχος:
$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (σύστημα με άπειρες λύσεις)

$$\begin{cases} 5x-6y+z=4 \\ 2x-3y+z=1 \\ 4x-3y-z=5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \Gamma_1-\Gamma_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ -2\Gamma_1+\Gamma_2 \\ -4\Gamma_1+\Gamma_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ 1/3\Gamma_2 \\ -9\Gamma_2+\Gamma_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η τελευταία γραμμή αποτελείται μόνο από μηδενικά. Με αντικατάσταση μεταβλητών προκύπτει ότι 0 = 0 που είναι πάντα αληθές. Στη συνέχεια βρίσκουμε τη γενική λύση.

Ο Στόχος:

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επανατοποθετούμε τις μεταβλητές

Λύνουμε για *x* & *y*

$$x \quad - z = 2$$
$$y - z = 1$$
$$z = z$$

Ας προχωρήσουμε ακόμα ένα βήμα και να δημιουργήσουμε ένα ‘0’ πάνω από το ‘1’ στη 2η στήλη

Το *z* είναι ανεξάρτητο

$3r_2 + r_1$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Προκύπτουν άπειρες λύσεις όπου το *z* είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

$$x = z + 2$$
$$y = z + 1$$
$$z = z$$

Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα

Αποδεικνύεται ότι με τη βοήθεια της επόμενης παρατήρησης μπορούμε να βρούμε τον **αντίστροφο** ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα

- Για να βρούμε τον αντίστροφο ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα:
  - Σχηματίζουμε τον $\boldsymbol{n \times 2n}$ πίνακα M (n γραμμών και $2n$ στηλών) του οποίου το **αριστερό μισό είναι ο πίνακας A και το δεξί μισό ο $\boldsymbol{n \times n}$ μοναδιαίος πίνακας $\boldsymbol{I_n}$**
  - Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gauss – Jordan μετασχηματίζουμε τον $\boldsymbol{M}$ **σε ανηγμένο κλιμακωτό**
  - Αν στον ανηγμένο αυτό κλιμακωτό το **αριστερό μισό είναι ο μοναδιαίος πίνακα $\boldsymbol{I_n}$**, τότε το δεξί μισό είναι ο αντίστροφος του A
    - Αλλιώς, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος

Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα

Παράδειγμα

- Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Λύση

- Σχηματίζουμε τον 3×6 πίνακα: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $H_{21}(-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to H_{31}(-4) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$

Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα

Λύση (…συνέχεια)

- $\to H_2(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to H_{32}(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$
- $H_3(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to H_{13}(-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to$
- $H_{23}(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Οπότε: $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{-11} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$