ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ορίζουσες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Ως **ορίζουσα** ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα A (n γραμμών και n στηλών) ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό τον οποίο συμβολίζουμε με $|A|$ ή $\det(A)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ορίζουσες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Αποδεικνύεται ότι *το άθροισμα του είναι το ίδιο για κάθε γραμμή του πίνακα και ίσο με τα αντίστοιχα αθροίσματα για κάθε στήλη*
- όπου ***k* μια γραμμή του *A*** και ***A_{ij}* η ορίζουσα του υποπίνακα** του που προκύπτει αν διαγράψουμε τη γραμμή και στήλη στην οποία βρίσκεται το a_{ij}

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{k+1} a_{k1} A_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2} A_{k2} + \ldots + (-1)^{k+n} a_{kn} A_{kn}$$

Ορίζουσες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

- Τη σταθερή αυτή τιμή (για κάθε γραμμή ή στήλη) τη λέμε ορίζουσα του πίνακα Α και το άθροισμα του δεξιού μέλους της αντίστοιχης εξίσωσης το λέμε **ανάπτυγμά** της κατά τα στοιχεία της *k*-γραμμής ή της *k*-στήλης της
- **Διάσταση** μιας ορίζουσας λέμε τον αριθμό n των γραμμών ή των στηλών της

Ορίζουσες

Ελάσσονες Ορίζουσες

- Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ με ορίζουσα την

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  - Η ορίζουσα $|\boldsymbol{A_{ij}}|$, η οποία προέρχεται από τα στοιχεία του πίνακα αφού «διαγραφούν» τα στοιχεία της i γραμμής και της j στήλης πολλαπλασιασμένη με τον παράγοντα $(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{i+j}}$, ονομάζεται **ελάσσων ορίζουσα** του πίνακα A

Ορίζουσες
Ελάσσονες Ορίζουσες

- Για παράδειγμα, αν «διαγραφούν» τα στοιχεία της 1ης γραμμής και της 1ης στήλης, η ελάσσων που προκύπτει θα ισούται με:

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

- Αν «διαγραφούν» τα στοιχεία της 2ης γραμμής και της 1ης στήλης, η ελάσσων που προκύπτει θα ισούται με:

$$|A_{21}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ορίζουσες
Ελάσσονες Ορίζουσες

Θεώρημα

- Για τον τετραγωνικό πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ισχύει ότι:
  - Αν επιλεγεί η $\boldsymbol{i}$ **γραμμή** ως ανάπτυξη των ελασσόνων οριζουσών, τότε η ορίζουσά του θα ισούται με $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a_{i1}A_{i1}} + \boldsymbol{a_{i2}A_{i2}} + \boldsymbol{a_{i3}A_{i3}} + \cdots + \boldsymbol{a_{in}A_{in}}$
  - Αν επιλεγεί η $\boldsymbol{j}$ **στήλη** ως ανάπτυξη των ελασσόνων οριζουσών, τότε η ορίζουσά του θα ισούται με $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a_{1j}A_{1j}} + \boldsymbol{a_{2j}A_{2j}} + \boldsymbol{a_{3j}A_{3j}} + \cdots + \boldsymbol{a_{nj}A_{nj}}$

Ορίζουσες

Ορίζουσες 2ης και 3ης τάξης

Ορίζουσες 2ης τάξης

- Η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι ο αριθμός

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Ορίζουσες

Ορίζουσες 2ης και 3ης τάξης

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Λύση

- Για να βρούμε την ορίζουσα ενός πίνακα 2×2, πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου και αφορούμε το γινόμενο των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου:

Δευτερεύουσα διαγώνιος = -2

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12-(-2)=14$$

Κύρια διαγώνιος = 12

Ορίζουσες

Ορίζουσες 2ης και 3ης τάξης

Ορίζουσες 3ης τάξης

- Σύμφωνα με τον ορισμό, το ανάπτυγμα της ορίζουσας ενός 3×3 πίνακα A ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής της είναι:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Ο ίδιος αριθμός προκύπτει αν “αναπτύξουμε” την ορίζουσα ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του Α. Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα της ως προς τη δεύτερη στήλη της έχει την ίδια τιμή:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Ορίζουσες

Ορίζουσες 2ης και 3ης τάξης

Ορίζουσες 3ης τάξης

- Δηλαδή, ο υπολογισμός μίας 3×3 ορίζουσας γίνεται ως εξής:
  - Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη της ορίζουσας και πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο της με την 2×2 ορίζουσα που προκύπτει αν διαγράψουμε τη γραμμή και τη στήλη στην οποία βρίσκεται το στοιχείο αυτό
  - Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα γινόμενα αυτά χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο πρόσημο του παρακάτω πίνακα

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την ορίζουσα ενός οποιουδήποτε $n \times n$ πίνακα χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμά της, ως προς μία οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη

Ορίζουσες

Ορίζουσες 2ης και 3ης τάξης

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα: $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Λύση

- Υπολογίζουμε το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης της, στην οποία υπάρχουν δύο μηδενικά:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\left[-2(-1) - 1(-1)\right] = 6$$

Ορίζουσες

Ορίζουσες 2ης και 3ης τάξης

Κανόνας Sarrus

- Ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός 3×3 πίνακα γίνεται εύκολα με τον λεγόμενο κανόνα Sarrus
  - Έστω ο αρχικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
  - Δημιουργούμε μια επαυξημένη έκδοσή του ως εξής: $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

Ορίζουσες

Ορίζουσες 2ης και 3ης τάξης

Κανόνας Sarrus (… συνέχεια)

- Με βάση τον κανόνα του Sarrus, η ορίζουσα υπολογίζεται αθροίζοντας τα γινόμενα των έξι διαγωνίων με τα κατάλληλα πρόσημα:
  - $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$
  - Οι «κύριες» διαγώνιοι με χρώμα μπλε (δηλ. από πάνω προς τα κάτω) φέρουν θετικό πρόσημο (+)
  - Οι «δευτερεύουσες» διαγώνιοι με χρώμα κόκκινο (δηλ. από κάτω προς τα πάνω) φέρουν αρνητικό πρόσημο (–)
  - $|A| = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ορίζουσες

Ορίζουσες 2ης και 3ης τάξης

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Λύση

- Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Sarrus:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad 18 \quad 60 \quad 16 \\ \left|\begin{matrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{matrix} \\ \qquad\qquad -20 \quad -24 \quad 36 \end{array} = (-8) - (94) = \mathbf{-102}$$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

- Η ορίζουσα $|A|$ ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ισούται με την ορίζουσα του ανάστροφου πίνακα A^T, δηλαδή $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}|$
- Αν όλα τα στοιχεία κάποιας τυχαίας **γραμμής (ή στήλης)** του πίνακα A ισούνται με το **μηδέν**, τότε $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$
- Αν ο πίνακας B προέρχεται από τον πίνακα A με **πολλαπλασιασμό μια γραμμής ή μιας στήλης με έναν πραγματικό αριθμό $\boldsymbol{\lambda}$, τότε** $|\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{A}|$

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

- Αν κάθε στοιχείο κάποιας τυχαίας **γραμμής $\boldsymbol{i}$ ενός πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι άθροισμα δύο προσθετέων**, δηλαδή $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ τότε για την ορίζουσά του θα έχουμε ότι: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

- Αν κάθε στοιχείο κάποιας τυχαίας **στήλης j ενός πίνακας A είναι άθροισμα δύο προσθετέων**, δηλαδή $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} + a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} + a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} + a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ τότε για την ορίζουσά του θα έχουμε ότι: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

- Αν σε μια ορίζουσα γίνει **αλλαγή θέσης δύο γραμμών ή δύο στηλών**, τότε η προκύπτουσα ορίζουσα θα ισούται με την αρχική **πολλαπλασιασμένη με -1**
- Αν ο πίνακας A έχει **δύο ίσες γραμμές (ή στήλες)**, τότε η ορίζουσά του θα ισούται με το **μηδέν**
- Αν ο πίνακας A έχει **δύο ανάλογες γραμμές (ή στήλες)**, τότε η ορίζουσά του θα ισούται με το **μηδέν**
- Αν η **γραμμή (ή στήλη)** μιας ορίζουσας ενός πίνακα **πολλαπλασιαστεί με πραγματικό αριθμό** και στη συνέχεια **προστεθεί** σε κάποια άλλη γραμμή (ή στήλη), τότε η ορίζουσα αυτή παραμένει **ίδια**
- Για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει: $|\boldsymbol{\lambda A}| = \boldsymbol{\lambda^n}|\boldsymbol{A}|, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

- Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι:
  Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου της

<u>Παράδειγμα</u>

- Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & -\beta & -1 & a \\ 0 & 0 & 2a & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Λύση

- Ο πίνακας αυτός είναι άνω τριγωνικός, οπότε η ορίζουσα του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του:

$$|A| = 1(-\beta)2a \cdot 5 = -10a\beta$$

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

Παρατήρηση

- Ο υπολογισμός μίας ορίζουσας γίνεται απλός αν με τη βοήθεια των προαναφερθέντων ιδιοτήτων οδηγηθούμε σε μία ίση με αυτήν **τριγωνική ορίζουσα**, της οποίας η τιμή είναι ίση με το **γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου** της
- *Αν αυτό δεν είναι εύκολο, τότε προσπαθούμε να οδηγηθούμε σε μία ίση ορίζουσα με όσον το δυνατόν περισσότερα μηδενικά*

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί −2 και προσθέτοντάς τη στη δεύτερη, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει, οπότε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

Παράδειγμα (… συνέχεια)

- Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί −1 και προσθέτοντάς τη στην τέταρτη, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει, οπότε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

- Αλλάζοντας τη δεύτερη γραμμή με την τρίτη η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο, οπότε:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

Παράδειγμα (… συνέχεια)

- Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη γραμμή επί −1 και προσθέτοντάς τη στην τέταρτη, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει, οπότε:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

- Προσθέτοντας την τρίτη γραμμή στην τέταρτη, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει, οπότε:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Ορίζουσες

Ιδιότητες Οριζουσών

Παράδειγμα (… συνέχεια)

- Πλέον η ορίζουσα είναι κάτω τριγωνική, οπότε είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου της:

$$|\boldsymbol{A}| = -\mathbf{1} \cdot \mathbf{4}(-\mathbf{1})(-\mathbf{3}) = -\mathbf{12}$$

Ορίζουσες

Βαθμός πίνακα

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Βαθμό (rank) ενός πίνακα A ονομάζουμε τη μέγιστη διάσταση ενός τετραγωνικού υποπίνακά του με μη μηδενική ορίζουσα
- Αν όλες οι υποορίζουσες του A είναι μηδέν χωρίς ο A να είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε ο βαθμός του ορίζεται να είναι 1.
- ΄Αρα, αν για έναν πίνακα A υπάρχει ένας τετραγωνικός $k \times k$ υποπίνακάς του με μη μηδενική ορίζουσα και όλοι οι διάστασης $k + 1$ τετραγωνικοί υποπίνακές του (αν υπάρχουν) έχουν ορίζουσα μηδέν, τότε ο βαθμός του A είναι k
- Αν η ορίζουσα ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα είναι μη μηδενική, τότε ο βαθμός του είναι n

Ορίζουσες

Βαθμός πίνακα

Παράδειγμα

- Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Λύση

- Η μεγαλύτερη διάσταση ορίζουσας του πίνακα αυτού είναι 3 και μία 3 × 3 ορίζουσά της (πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη) είναι η (ανάπτυγμα ως προς την τρίτη στήλη της, που περιέχει δύο μηδενικά): $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7(1(-1) - 2(-2)) = 21 \neq 0$
- Άρα ο βαθμός του είναι 3 ($rank(A) = 3$)

Ορίζουσες

Βαθμός πίνακα

Παράδειγμα

- Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

- Η ορίζουσα του τετραγωνικού αυτού πίνακα είναι (ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή της):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$1 \cdot 0 - 1(1-2) - 1(-1+2) = 0.$$

- Επίσης, υπάρχει 2 × 2 υποπίνακας του A με μη μηδενική ορίζουσα, την:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1 \cdot 1 = -2 \neq 0$$

Άρα, $rank(A) = 2$

Ιδιότητες Πινάκων

Πρόταση

- Αν ο πίνακας A είναι διαγώνιος, τότε και οποιαδήποτε δύναμη του A^k είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα a_{ii}^k
- Για παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} (-3)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες Πινάκων

Πρόταση

- Η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων *A*, *B* είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών τους:

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

Ιδιότητες Πινάκων

Τιμή συνάρτησης για πίνακα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε τιμή μίας **πολυωνυμικής συνάρτησης**

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

για έναν πίνακα Α τον πίνακα $P(A)$ που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τον A στη θέση του x στην $P(x)$

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n$$

όπου I_n ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας.

- Ορίζουμε ως τιμή γενικότερα μίας συνάρτησης $f(x)$ για έναν πίνακα Α τον πίνακα $f(A)$ που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τον Α στη θέση του x στο ανάπτυγμα Mac’ Laurin αυτής

Ιδιότητες Πινάκων

Τιμή συνάρτησης για πίνακα

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο πίνακας $f(A)$ αν $f(x) = x^2 - 2x + 3$ και $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Λύση</u>

- Σύμφωνα με τον ορισμό, $f(A) = A^2 - 2A + 3I_2$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + (-1)1 & 0(-1) + (-1)1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1(-1) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & -1 - 2(-1) + 3 \cdot 0 \\ 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

ΟΡΙΣΜΟΙ

- ΄Ενας *n* × *n* πίνακας A λέγεται **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει *n* × *n* πίνακας A^{-1}, τέτοιος ώστε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

όπου I_n ο *n* × *n* μοναδιαίος πίνακας.

  - Τον A^{-1} τον λέμε **αντίστροφο** πίνακα του A

- ΄Ενας τετραγωνικός πίνακας *A* είναι **αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν η ορίζουσα του δεν είναι μηδέν
  - *A* αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

Πρόταση

Ένας 2×2 πίνακας $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $|A| = \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = a\delta - \beta\gamma \neq 0$

και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & a \end{bmatrix}$

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

Παράδειγμα

- Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

<u>Λύση</u>

- Υπολογίζουμε την ορίζουσα: $|A| = 3 \cdot 2 - (-1)(-5) = 6 - 5 = 1 \neq 0$
- $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

Παράδειγμα

- Να βρεθεί ο 2 × 2 πίνακας X αν $AX = B$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Λύση</u>

- Υπολογίζουμε την ορίζουσα: $|A| = 1 \cdot 2 - (-1)0 = 2 \neq 0$
- Ο Α είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- ΄Ετσι πολλαπλασιάζοντας από αριστερά κατά μέλη την αρχική εξίσωση με τον πίνακα A^{-1} προκύπτει: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow I_2X = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Ορίζουμε ως **συμπληρωματικό** ενός *n* × *n* τετραγωνικού πίνακα Α τον πίνακα:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}A_{11} & (-1)^{2+1}A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}A_{n1} \\ (-1)^{1+2}A_{12} & (-1)^{2+2}A_{22} & \dots & (-1)^{n+2}A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{1+n}A_{1n} & (-1)^{2+n}A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n}A_{nn} \end{bmatrix}$$

- Όπου A_{ij} η ορίζουσα του υποπίνακα, που προκύπτει αν διαγράψουμε τη γραμμή και τη στήλη στην οποία βρίσκεται το στοιχείο a_{ij} του A
- Δηλαδή το *i, j* στοιχείο του συμπληρωματικού ***adj*(*A*)** του πίνακα *A* είναι η ελάσσων ορίζουσα:

$$[adj(A)]_{ij} = (-1)^{j+i}A_{ji}$$

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

Πρόταση

- Αν ένας πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφός του είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τον αντίστροφο ενός 3 × 3 πίνακα A:

- Για κάθε στοιχείο του a_{ij} υπολογίζουμε **την ορίζουσα του 2 × 2 υποπίνακα $\boldsymbol{A_{ij}}$** που προκύπτει αν διαγράψουμε την *i*–γραμμή και *j*–στήλη στην οποία αυτό βρίσκεται
- Σχηματίζουμε έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι τα αντίστοιχα A_{ij} με **εναλλάξ πρόσημα**, ξεκινώντας με + από το a_{11} (όπως στο **ανάπτυγμα ορίζουσας**)
  - Ο **ανάστροφος** του πίνακα αυτού είναι ο συμπληρωματικός του *A* (***adj*(*A*)**)
- Υπολογίζουμε την ορίζουσα του *A*
- Ο αντίστροφος του *A* είναι: $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$
- \`Ομοια γίνεται και ο υπολογισμός του αντιστρόφου ενός τετραγωνικού πίνακα μεγαλύτερης διάστασης

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

Παράδειγμα

- Να εξεταστεί αν ο παρακάτω πίνακας είναι αντιστρέψιμος και αν είναι, να βρεθεί ο αντίστροφός του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

Παράδειγμα (…συνέχεια)

Λύση

- Οι ορίζουσες των 2 × 2 υποπινάκων του *A* είναι:

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4 \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11 \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

Ιδιότητες Πινάκων

Αντίστροφος πίνακα

Παράδειγμα (…συνέχεια)

Λύση (…συνέχεια)

- Οπότε ο συμπληρωματικός του A είναι:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -(-11) & 3 \\ -11 & 4 & -(-3) \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

- Η ορίζουσα του A υπολογίζεται ότι είναι $|A| = 21$, οπότε ο αντίστροφος του είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -4 & 11 & 3 \\ -11 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{21} & \frac{11}{21} & \frac{1}{7} \\ -\frac{11}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες Πινάκων

Ιδιότητες αντίστροφου πίνακα

- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $\left(A^k\right)^{-1} = (A^{-1})^k,\ k \in \mathbb{N}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Ιδιότητες Πινάκων

Ιδιότητες αντίστροφου πίνακα

Παρατήρηση

- Κάθε $n \times n$ διαγώνιος πίνακας με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \neq 0$), είναι **αντιστρέψιμος** και ο **αντίστροφος** του είναι:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες Πινάκων

Ιδιότητες αντίστροφου πίνακα

ΟΡΙΣΜΟΙ

Θεωρούμε τον πίνακα $A - \lambda I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $|A - \lambda I|$ είναι η ορίζουσά του

- Το πολυώνυμο $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A
- Η εξίσωση $p(\lambda) = 0$ λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του A
- Οι ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης λέγονται **ιδιοτιμές** του A
- Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών ενός πίνακα A λέγεται **φάσμα** του τετραγωνικού πίνακα και συμβολίζεται με $\lambda(A)$