ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Πίνακες

Σκεφτείτε τα ακόλουθα…

- Πώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια ψηφιακή εικόνα ως αρχείο bitmap;
- Πώς υλοποιούνται τα γραφικά σε ένα υπολογιστικό σύστημα;
- Πώς εφαρμόζονται τα εφέ σε μια ψηφιακή εικόνα;

Με τη χρήση Πινάκων!

Πίνακες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένας **πίνακας** είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών σε γραμμές και στήλες. Οι γραμμές είναι οριζόντιες ενώ οι στήλες κατακόρυφες
- Οι **διαστάσεις** ενός πίνακα δηλώνονται ως $m \times n$, όπου m είναι το πλήθος των γραμμών του πίνακα, ενώ n είναι το πλήθος των στηλών του

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Οι αριθμοί a_{ij} λέγονται **στοιχεία** του πίνακα
- Ένας πίνακας **συμβολίζεται** συνήθως με κεφαλαίο γράμμα και με διαφορετικούς τρόπους:
  - $A = (a_{ij})$
  - $A = [a_{ij}]$
  - $A = \|a_{ij}\|$
  - $A_{m\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ο πίνακας που αποτελείται μόνο από μηδενικά στοιχεία ονομάζεται **μηδενικός πίνακας** και συμβολίζεται ως O

$$O = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- Ένας πίνακας που έχει μόνο μία γραμμή ονομάζεται **πίνακας-γραμμή**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

- Ένας πίνακας που έχει μόνο μία στήλη ονομάζεται **πίνακας-στήλη**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Αν σε έναν πίνακα αλλάξουν αμοιβαία τα στοιχεία των γραμμών και των στηλών, τότε προκύπτει ένας νέος πίνακας που ονομάζεται **ανάστροφος** και συμβολίζεται με A^T (με διάσταση $n \times m$)
    - Προφανώς ισχύει ότι $(A^T)^T = A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένας πίνακας που έχει ίσο πλήθος γραμμών και στηλών (δηλ. $m = n$) ονομάζεται **τετραγωνικός**
  - Ο αριθμός n λέγεται **τάξη** ή **σειρά** του πίνακα
  - Τα στοιχεία a_{ij} όπου $i = j$ σχηματίζουν την **κύρια διαγώνιο** του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένας πίνακας όπου όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι μηδέν ονομάζεται **διαγώνιος**

$$diag(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Ο διαγώνιος τετραγωνικός πίνακας που τα μη-μηδενικά στοιχεία του είναι άσοι ‘1’ λέγεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται με I

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Βασικές έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Δύο $m \times n$ πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ λέγονται **ίσοι** αν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα (δηλ. $a_{ij} = b_{ij}$)
  - Εννοείται ότι δύο ίσοι πίνακες έχουν ακριβώς τις ίδιες διαστάσεις
- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ λέγεται **συμμετρικός**, αν το κάθε στοιχείο του είναι ίσο με το συμμετρικό του ως προς την κύρια διαγώνιο (δηλ. $a_{ij} = a_{ji}$ για $i \neq j$)
  - Προκύπτει ότι ένας πίνακας είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A^T = A$
- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ λέγεται **ημισυμμετρικός** ή **αντισυμμετρικός** αν $a_{ij} = -a_{ji}$ για $i \neq j$

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Έστω δύο πίνακες **ίδιων διαστάσεων** $(m \times n)$ $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$. **Άθροισμα** των δύο πινάκων λέγεται ένας πίνακας C οποίος είναι επίσης διάστασης $m \times n$ και ισούται με $C = [c_{ij}]$, όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Συμβολίζεται ως $C = A + B$.

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

Ιδιότητες **πρόσθεσης** πινάκων

- $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- $A + O = O + A = A$ (ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης)

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Έστω πίνακας $A = [a_{ij}]$ διαστάσεων $m \times n$. Θεωρούμε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$. **Γινόμενο** του αριθμού λ με τον πίνακα A λέγεται ένας πίνακας C οποίος είναι επίσης διάστασης $m \times n$ και ισούται με $C = [c_{ij}]$, όπου $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. Συμβολίζεται ως $C = \lambda A$.
    - Η πράξη αριθμού με πίνακα ονομάζεται και βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Παράδειγμα

$$4 \times \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -16 \\ 20 & 0 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Έστω πίνακας $A = [a_{ij}]$ διαστάσεων $m \times n$. Θεωρούμε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$. Ο πίνακας $A' = [a'_{ij}]$, όπου $a'_{ij} = -a_{ij}$, λέγεται **αντίθετος** του A. Συμβολίζεται ως $-A$.
- Με βάση τον παραπάνω ορισμό, ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

Ιδιότητες **βαθμωτού πολλαπλασιασμού**

- $kA = Ak,\qquad k \in \mathbb{R}$ και $A = [a_{ij}]$
- $k(lA) = (kl)A,\qquad k, l \in \mathbb{R}$ και $A = [a_{ij}]$
- $k(A + B) = kA + kB,\qquad k \in \mathbb{R}$ και $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$
- $(k + l)A = kA + lA,\qquad k, l \in \mathbb{R}$ και $A = [a_{ij}]$
- $1 \cdot A = A \cdot 1 = A,\qquad A = [a_{ij}]$
- $0 \cdot A = A \cdot 0 = O,\qquad A = [a_{ij}]$

Σημείωση: Η **διαφορά** πινάκων ορίζεται ως $A - B = A + (-1)B = A + (-B)$

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

- Ο **πολλαπλασιασμός πινάκων** είναι η πιο «ενδιαφέρουσα» πράξη μεταξύ πινάκων
- ΔΕΝ πρόκειται απλά για πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων
- ΔΕΝ ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα → Η σειρά παίζει ρόλο!

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

- Έστω οι πίνακες $A = [a_{ij}]$, διαστάσεων $m \times n$, και $B = [b_{ij}]$, διαστάσεων $n \times s$. **Γινόμενο** των δύο πινάκων λέγεται ένας πίνακας C οποίος είναι διάστασης $m \times s$ και

  ισούται με $C = [c_{ij}]$, όπου $c_{ij} = \sum_{v=1}^{n} a_{iv} b_{vj}$.

  Συμβολίζεται ως $C = A \times B$.

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

- Με βάση τον ορισμό για τον **πολλαπλασιασμό πινάκων** A και B, τα στοιχεία του νέου πίνακα C έχουν την ακόλουθη προέλευση:
  τα στοιχεία της i γραμμής και της j στήλης προέρχονται από το γινόμενο των στοιχείων της i γραμμής του πίνακα A (n στοιχεία) επί τα αντίστοιχα στοιχεία της j στήλης του πίνακα B (n στοιχεία), με τα επιμέρους γινόμενα να αθροίζονται
- Προϋπόθεση για τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων είναι ο αριθμός των στηλών του πρώτου να ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δευτέρου
  - Παράδειγμα:

2 στήλες

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

2 γραμμές

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πινάκων

- Παίρνουμε τους αριθμούς της πρώτης γραμμής του πρώτου πίνακα
- Πολλαπλασιάζουμε κάθε αριθμό με τον αντίστοιχο αριθμό της πρώτης στήλης του δεύτερου πίνακα
- Προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 1 + 3 \times 3 = 11$$

Το αποτέλεσμα ‘11’ τοποθετείται στην γραμμή 1 και στη στήλη 1 του αποτελέσματος.

Επαναλαμβάνουμε για
γραμμή 1 – στήλη 2
γραμμή 1 – στήλη 3
γραμμή 2 – στήλη 1
κ.ο.κ.

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

(… συνέχεια) Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πινάκων

- Παρατηρούμε τις **διαστάσεις** των πινάκων που πολλαπλασιάζονται καθώς και του αποτελέσματος

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & -15 \\ 13 & 34 & -30 \\ -12 & -46 & 35 \end{bmatrix}$$

$\underline{3} \times 2$ $\qquad$ $2 \times \underline{3}$ $\qquad$ $\underline{3} \times \underline{3}$

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 0 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -45 \\ 60 \end{bmatrix}$$

3 x 2   2 x 1   3 x 1

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

Ιδιότητες **πολλαπλασιασμού πινάκων**

- Για τυχαίο πίνακα $A = [a_{ij}]$ διαστάσεων $m \times n$ υπάρχουν μοναδιαίοι πίνακες I_m και I_n για τους οποίους ισχύουν: $I_m A = A$ και $A I_n = A$
- Αν O είναι ένας μηδενικός πίνακας διαστάσεων $n \times s$, τότε $C = AO = O$ με διαστάσεις $m \times s$, δεδομένου ότι ο A έχει διαστάσεις $m \times n$
- Αν O είναι ένας μηδενικός πίνακας διαστάσεων $s \times m$, τότε $C = OA = O$ με διαστάσεις $s \times n$, δεδομένου ότι ο A έχει διαστάσεις $m \times n$
- $(AB)C = A(BC)$, όπου A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, όπου A, B πίνακες κατάλληλων διαστάσεων και $k \in \mathbb{R}$

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

(… συνέχεια) Ιδιότητες **πολλαπλασιασμού πινάκων**

- $(A+B)C = AC + BC$, όπου A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων
- $C(A+B) = CA + CB$, όπου A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων

Σημείωση 1: Ο πολλαπλασιασμός πινάκων γενικεύεται για πολλαπλούς πίνακες

Σημείωση 2:

$$D = (A+B)C = \left[d_{ij}\right] \Rightarrow d_{ij} = \sum_{v=1}^{n} (a_{iv} + b_{iv})c_{vi} = \sum_{v=1}^{n} a_{iv}c_{vi} + \sum_{v=1}^{n} b_{iv}c_{vi} \Rightarrow AC + BC$$

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ διαστάσεων $n \times n$
- Η **δύναμη $\boldsymbol{k}$ τάξης** του πίνακα A ορίζεται ως ακολούθως:

$$A^1 = A, \qquad A^k = A^{k-1}A = A \cdot A \cdots A, \qquad k > 1$$

- $A \neq O \Rightarrow A^0 = I$

Πίνακες

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

διαστάσεων $m \times n$

και ο ανάστροφός του $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

διαστάσεων $n \times m$

Ισχύει ότι:

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T, \qquad k \in \mathbb{R}$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Πίνακες

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα

Απόδειξη της ιδιότητας $(\boldsymbol{AB})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$

- Θεωρούμε πίνακα $A = [a_{ij}]$ διαστάσεων $m \times n$ και πίνακα $B = [b_{ij}]$ διαστάσεων $n \times s$
- Τότε, το γινόμενο AB έχει διαστάσεις $m \times s$
- Οπότε οι διαστάσεις του $(AB)^T$ είναι $s \times m$
- Στο δεξί μέλος της εξίσωσης, οι διαστάσεις του B^T είναι $s \times n$ και του A^T είναι $n \times m$
- Άρα οι διαστάσεις του δεξιού μέλος της εξίσωσης ($B^T A^T$) είναι $s \times m$ και ταυτίζονται με αυτές του αριστερού μέλους της ($(AB)^T$)
- Έστω $AB = D = [d_{ij}]$, τότε $d_{ij} = \sum_{v=1}^{n} a_{iv} b_{vj}$ και $(AB)^T = D^T$
- Έστω $B^T A^T = E = [e_{ij}]$, τότε $e_{ij} = \sum_{v=1}^{n} b_{iv} a_{vj} = d_{ji}$, επομένως $D^T = E \Rightarrow (\boldsymbol{AB})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$

Πίνακες Μηδέν-Ένα

Boolean πράξεις με πίνακες

- Ένας πίνακας του οποίου οι καταχωρήσεις είναι είτε 0 είτε 1, ονομάζεται πίνακας **μηδέν-ένα**
- Έστω $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ είναι πίνακες μηδέν-ένα διαστάσεων $m \times n$
- Τότε, η **ένωση** των A και B είναι ο πίνακας μηδέν-ένα του οποίου το στοιχείο (i, j) είναι το $a_{ij} \vee b_{ij}$ και συμβολίζεται ως $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$
- Η **τομή** των A και B είναι ο πίνακας μηδέν-ένα του οποίου το στοιχείο (i, j) είναι το $a_{ij} \wedge b_{ij}$ και συμβολίζεται ως $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$

Πίνακες Μηδέν-Ένα

Boolean πράξεις με πίνακες

Παράδειγμα

- Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Τότε $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Και $A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Πίνακες Μηδέν-Ένα

Boolean πράξεις με πίνακες

- Έστω οι πίνακες μηδέν-ένα $A = [a_{ij}]$, διαστάσεων $m \times n$, και $B = [b_{ij}]$, διαστάσεων $n \times s$. **Boolean γινόμενο** των δύο πινάκων λέγεται ένας πίνακας μηδέν-ένα C οποίος είναι διάστασης $m \times s$ και ισούται με $C = [c_{ij}]$ όπου
  $$c_{ij} = \bigvee_{v=1}^{n} a_{iv} \wedge b_{vj}$$
  Συμβολίζεται ως $C = A \odot B$.
- *Σημείωση: Το Boolean γινόμενο πινάκων μοιάζει με το κανονικό γινόμενο πινάκων, όπου η πράξη της πρόσθεσης έχει αντικατασταθεί από την ένωση, ενώ η πράξη του πολλαπλασιασμού από την τομή*

Πίνακες Μηδέν-Ένα

Boolean πράξεις με πίνακες

<u>Παράδειγμα</u>

- Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Τότε $A \odot B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Πράξεις με πίνακες

- Έστω ο τετραγωνικός μηδέν-ένα πίνακας $A = \left[a_{ij}\right]$ διαστάσεων $n \times n$
- Η **Boolean δύναμη $\boldsymbol{k}$ τάξης** του πίνακα A ορίζεται ως ακολούθως:

$$A^{[1]} = A, \qquad A^{[k]} = A^{[k-1]}A = A \odot A \odot \cdots \odot A, \qquad k > 1$$

<u>Παράδειγμα</u>

- Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, τότε $A^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{[4]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Αποδεικνύεται ότι για $k \geq 5$ ισχύει ότι $A^{[k]} = A^{[5]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$